

固体伝搬雑音予測法の検討及び 新母船への適用

佐野 正 *¹ 中西俊之 *¹ 網谷泰孝 *¹
松本 潔 *² 織田光秋 *²

6500m潜水調査船支援母船(新母船)の建造にあたり、技術的最重要課題は6500m以上の距離で潜水船や曳航式無人探査機の測位、水中通信、測深等を十分に実施できるところまで低雑音化を図ることである。

主機等の固体伝搬雑音は、船体からの水中放射雑音の主要因であり、これを精度よく予測して適切な防振対策を行うことが不可欠である。

新母船ではこの予測法として、近年各分野で実用化が進められているSEA法を採用することとしているが、伝搬経路に対する内部損失等諸定数の与え方により予測精度は大きく異なる。

そこで、この予測法の精度向上を計るため新母船と同種船である「なつしま」を用いて振動伝搬系の実船振動計測を実施するとともに、「なつしま」のSEA法による予測計算を行い、実測値と比較することにより解析法の検討を行った。

その結果、新母船の固体伝搬雑音予測法として、SEA法を用いるための適切な定数等を得ることができ、精度のよい予測が可能となった。

Study on Method to Estimate Structure-Borne Noise and Its Application to New Support Vessel

Tadashi SANO*³, Toshiyuki NAKANISHI*³, Yasutaka AMITANI*³
Kiyoshi MATSUMOTO*⁴, Mitsuaki ODA*⁴

The most important technical item is to achieve low noise control for the JAMSTEC support vessel for 6500 m deep research submersible in order to make effective use of its acoustic system, which consists of positioning, telephone, telemetry, echo sounder, etc.

The underwater radiated noise from a ship's hull is mainly due to structure-borne noise arising from vibration of the main engines or machineries.

*¹ 深海開発技術部

*² 川崎重工業(株)

*³ Deep Sea Technology Department

*⁴ Kawasaki Heavy Industries

Therefore, it is necessary to accurately estimate the transmission path and the constant of transfer function of vibration, and carry out appropriate countermeasures for vibration reduction.

This project intends to adopt SEA (Statistical Energy Analysis) as an estimation method for the new support vessel, but it is necessary to find effective constants used in transfer function of SEA, in essential frequency range.

Therefore, a study was conducted to gain those constants by using the vessel NATSUSHIMA, which is similar in structure to the new support vessel. As for the results, a comparison between the measurements and the calculations showed good agreement. Therefore, we confirmed that SEA is very useful in adopting estimations for the new support vessel.

1. まえがき

昭和62年度から建造に着手している6500 m潜水調査船支援母船（以下「新母船」という）は、潜水船や曳航式無人探査機に対する測位、水中通話及び精密測深等、音響機器の有効使用という観点から、同種船である2000 m潜水調査船「しんかい2000」の支援母船「なつしま」より更に厳しい低雑音化が要求される。

特に主機、補機等の振動による固体伝搬雑音は、水中放射雑音の主要な因と考えられ、新母船の建造に当っては、これを精度よく予測して適切な防振対策を施工する必要がある。

この予測方法としては、FEM、BBA法及びSEA法等がある。このうちFEMやBBA法は低周波数領域の予測に限定される。「なつしま」や新母船のように、高周波数領域（新母船では5～15 kHzでの予測が必要）での予測にはヤンセン法又はSEA法の適用が考えられる。

「なつしま」の建造当時はSEA法が船全体の振動伝搬予測方法としてまだ十分確立されていなかったこともあり、類似船での実船計測を十分行い、この振動伝搬傾向から「なつしま」の振動伝搬を予測する、いわゆるヤンセン法に類似した方法で行い一応の成果を収めた。

新母船においては、「なつしま」より更に精度のよい予測を合理的に行うため、予測法としての実用化が各分野で進められているSEA法の適用を考えている。

一方、SEA法による雑音予測は、船体のモデル化、起振源レベルの見積り方、構成板要素の内部損失及び音響放射効率の与え方等によって計算結果が大きく異ってくる。そこで新母船の雑音予測に先立ち、振動および雑音の実測データがそろっている「なつしま」の雑音予測計算を行いこれと実測データとを比較することにより、予測精度の確認及び精度向上のための検討を行った。またSEA法の適用に当り高周波数領域での内部損失等を実測データに基づいて求めるため「なつしま」を用いて新たに実船計測（昭和61年8月実施）を実施した。

本書では新母船のためのSEA法による固体伝搬雑音予測方法の検討結果を示す。

2. SEA法の解析手順

「なつしま」を対象にしたSEA法による解析手順を図1に示す。

3. 「なつしま」の補機の振動伝搬計測結果（実船計測）のSEA法への適用

(1) 内部損失

鉄板の内部損失についてはSR156¹⁾で、周辺支持及び周辺固定の単純な支持条件で、8 kHzまでの値が報告されている。

新母船の雑音予測には更に高い周波数領域で複雑な支持条件での内部損失を設定する必要がある。

このため、「なつしま」を用いて振動伝搬経路の振動計測を行い、この実測値によく合うよう内部損失を逆算することにした。

図2に補助発電機運転時、2重底上の振動が機器からの距離に対して減衰する様子を実測値と、これに合うよう内部損失を定めてSEA解析を行った計算値とを比較して示す。

図2に示す実測値と一致するよう逆算した内部損失を、SR156の報告値と比較して図3に示す。

これによれば、ほぼ実測値に合うような内部損失は、4 kHz～16 kHzでほぼ一定でSR156の周辺支持と周辺固定のほぼ中間的な値となった。

(2) 補機の起振力

SEA法で解析モデルに機器の起振力を正しく入力することは精度のよい解析を行う第一歩である。

機器の起振力は、一般には理論的にも実験的にも正しく求めることは困難な場合が多く、通常は機器がその支持構造に与える振動からその振動エネルギーを求めて入力する方法がとられる。

一方、SEA法で船全体をモデル化する場合、小さな板かアングル材を組み合わせた構造となっている機器台までも含めるとこの部分の振動モードの数が少ないため、SEA法の仮定条件（モデル化された要素が十分に多い振動モードを有する）を満足しないので、機器台まで含めたモデル化はせず、主に機器台基部の2重底や甲板等の主要部材をモデル化するのが一般的である。

従って、SEAモデルには機器台基部の要素の振動を予想又は実測して入力することになる。

昭和61年8月の「なつしま」の実船計測では

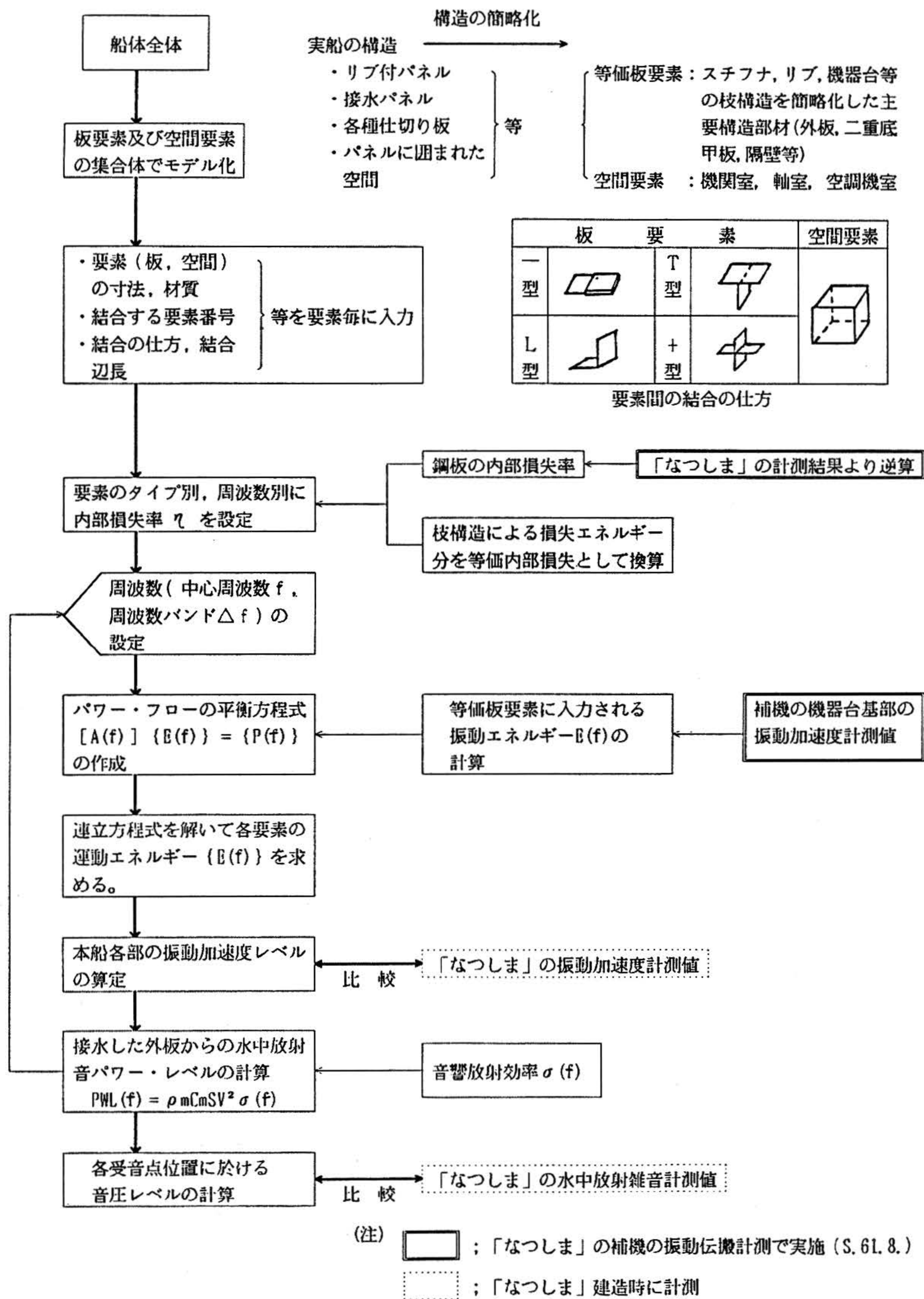


図1 SEA解析手順
Fig.1 Flow chart of SEA

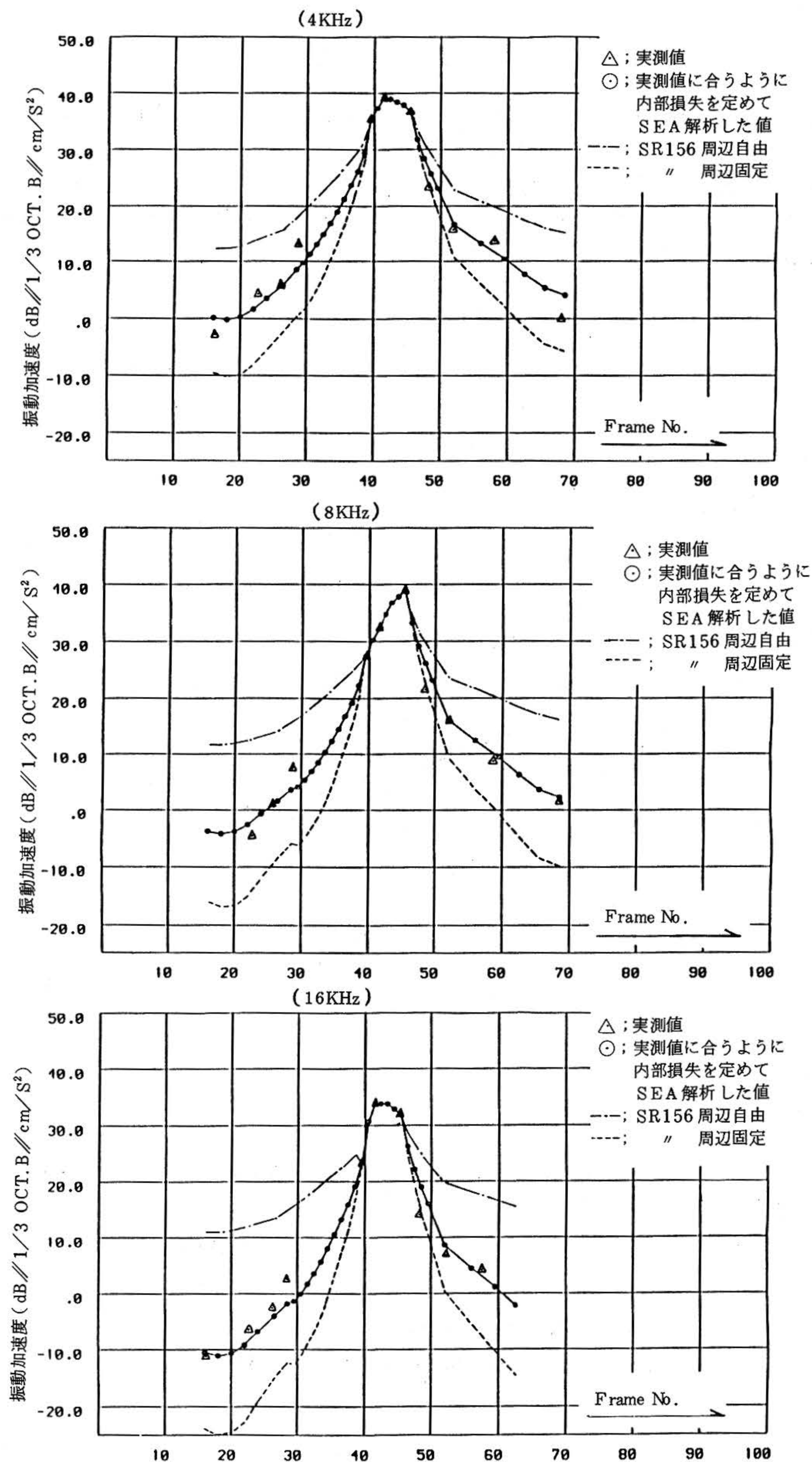


図2 二重底振動減衰傾向 (補助発電機運転時)
Fig.2 Distribution of vibration on double bottom

新母船の機器台も同種のものとなる代表的な機器台を選定し、機器作動時の機器台上面及び基部の振動を計測して、振動の減衰状況を把握した。

図4に計測例として補助発電機の機器台上面及び基部の振動計測結果を示し、図5に補助発電機

の機器台上面に対する機器台基部の振動減衰量を示す。

「なつしま」のSEA解析においては機器の起振力として、この機器台基部の振動実測値を直接用いることにした。

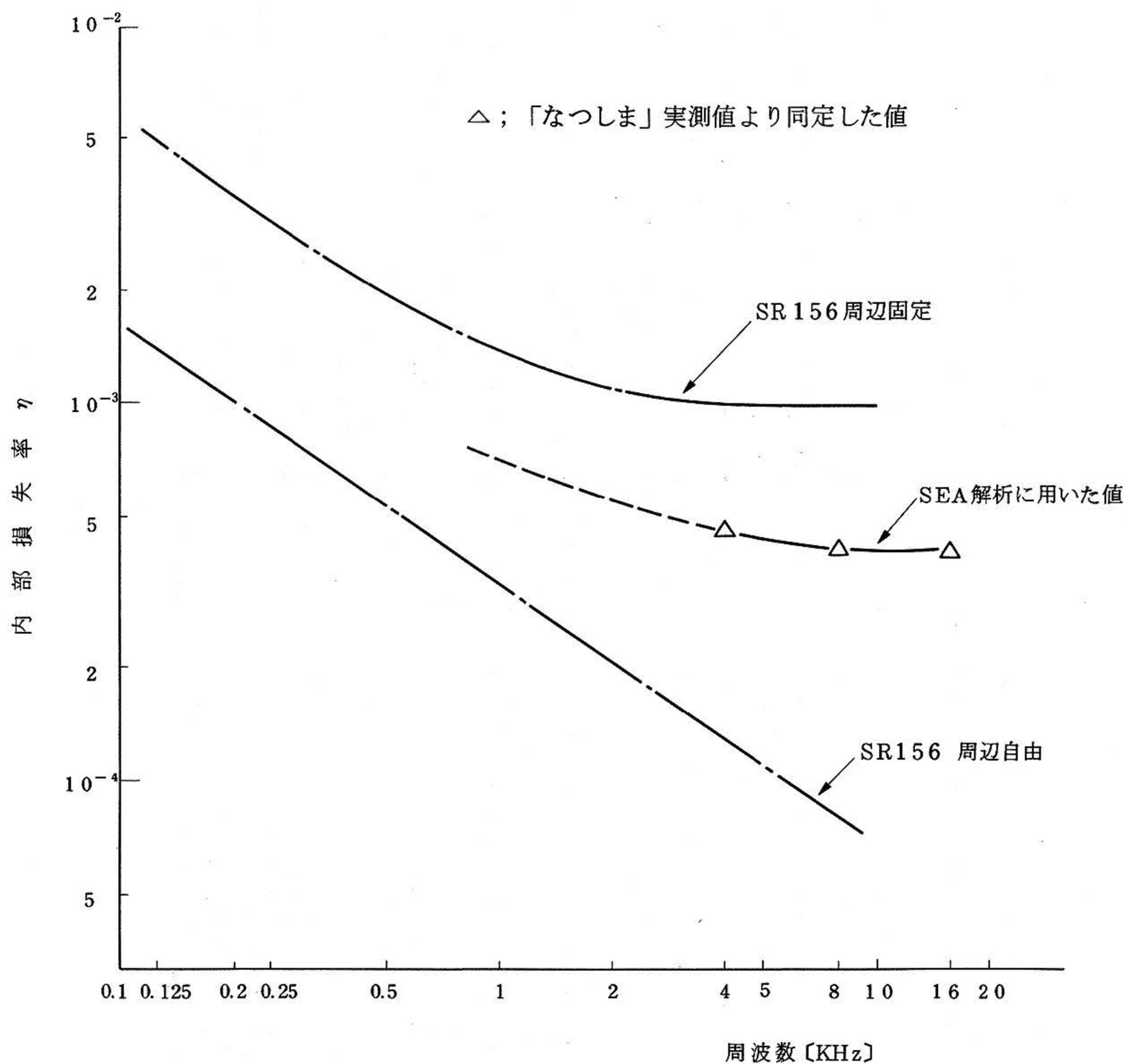
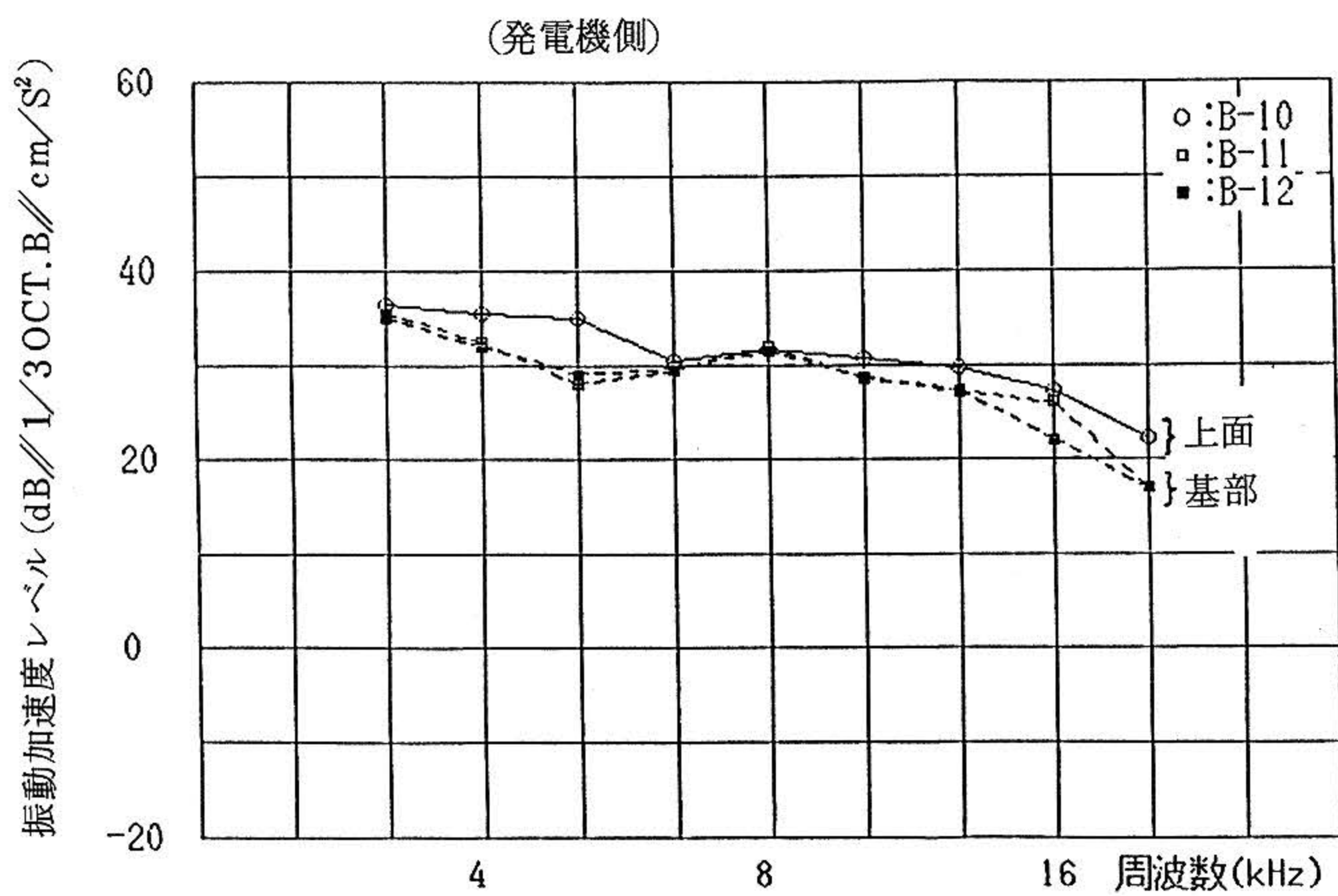
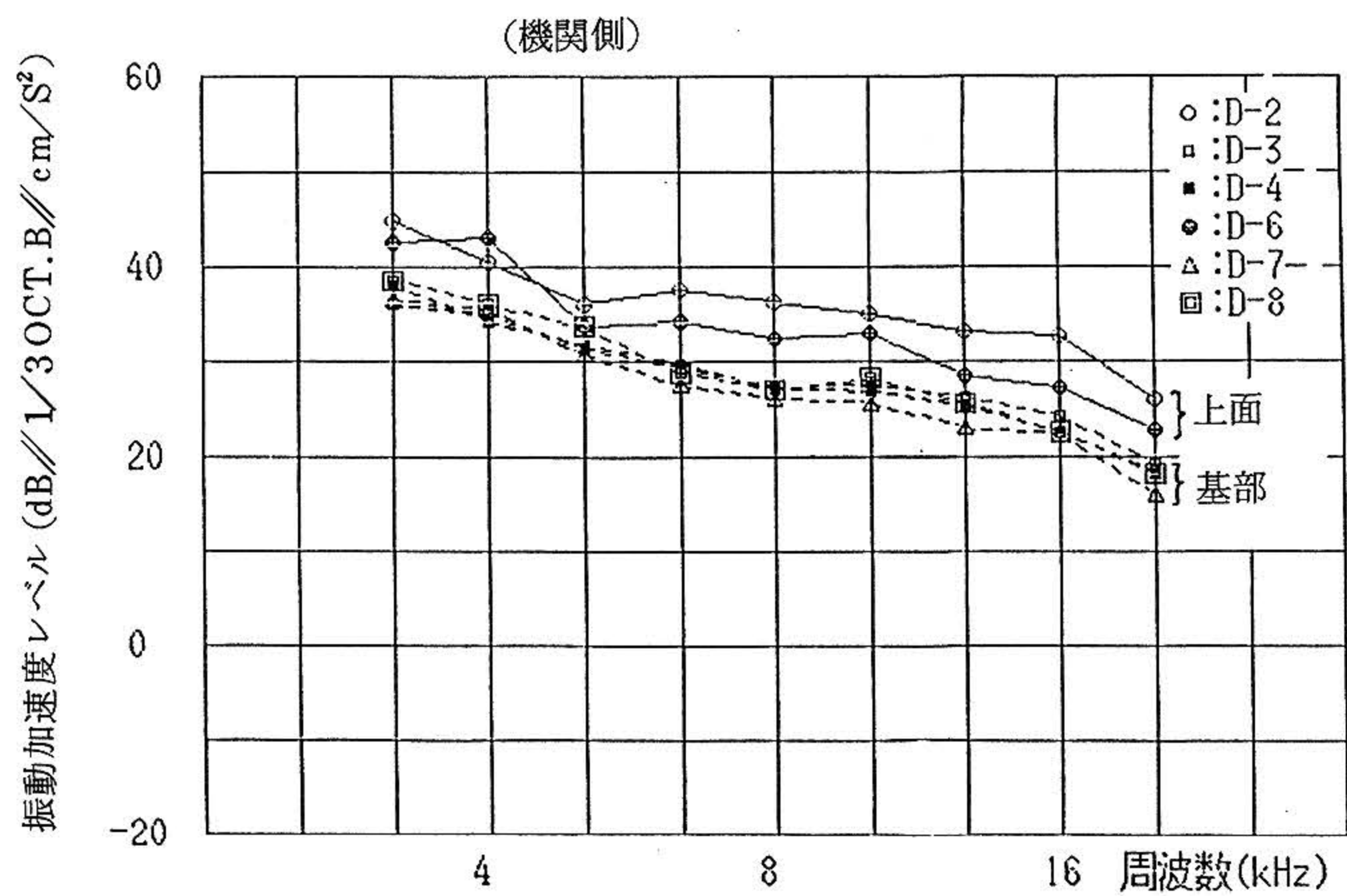


図3 鋼板の内部損失率
Fig.3 Damping coefficient of steel plate



補助発電機機器台

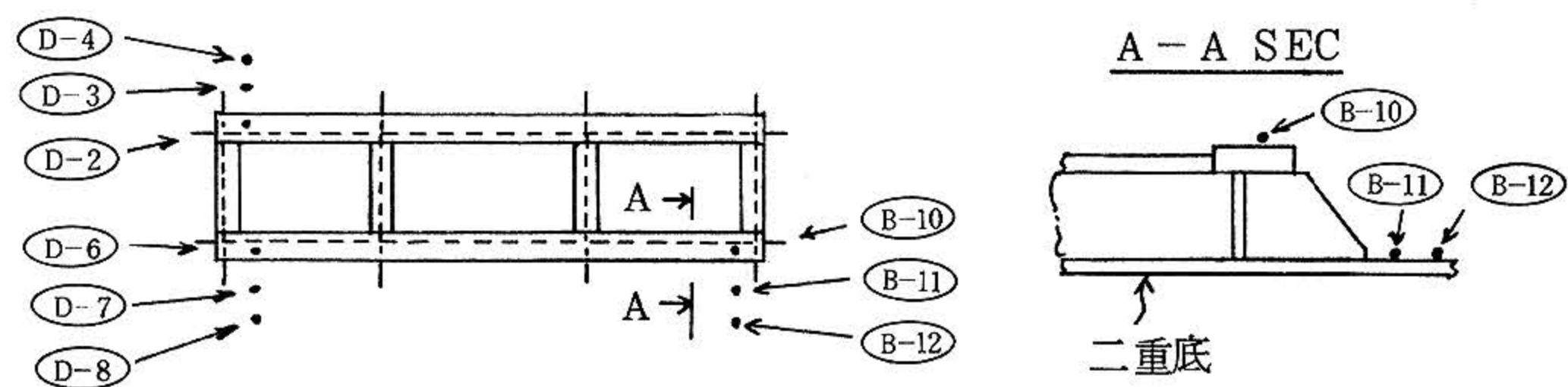


図4 機器台上面/基部振動計測結果

Fig.4 Results of measured vibration of foundation for equipment

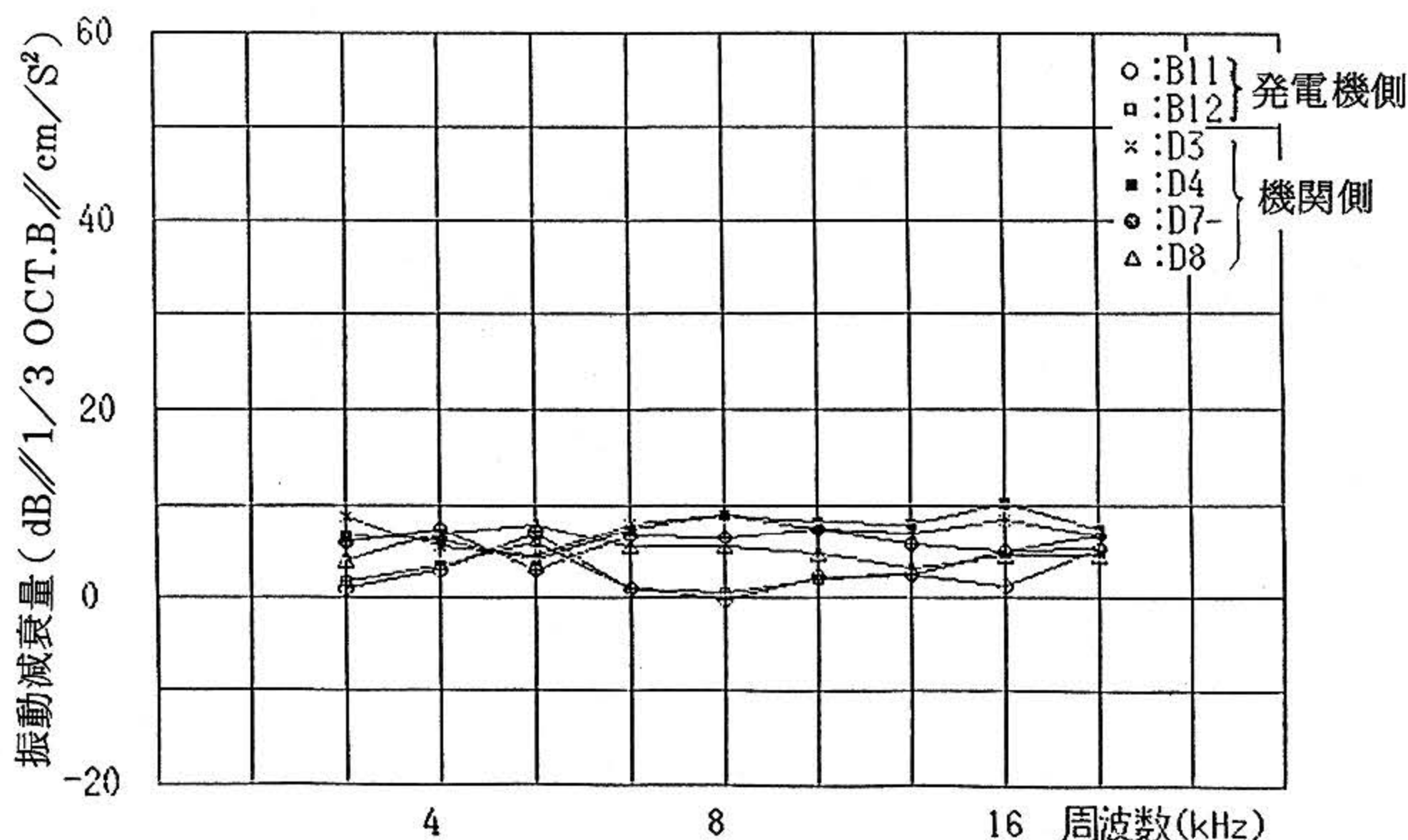


図5 機器台上面／基部振動減衰量(補助発電機)

Fig.5 Vibration decrease of double bottom to upper foundation

4. 「なつしま」のSEA解析要領

(1) モデル化方法及び要素分割

モデル化及び要素分割は下記の考え方により行った。

- (a) 船の船首尾方向の雑音分布を求めるため船全体をモデル化した。

「なつしま」は構造上ほぼ左右対称であるが機器の配置が非対称であるため左右舷を含め船全体をモデル化した。

- (b) モデル化の対象は外板，2重底，甲板，隔壁及びフロア，ガーター等の大骨とした（以下これらを「モデル化対象要素」という）。これらに取付く補強リブや各種仕切り等の構造はモデル化せずモデル化対象要素との結合部で失われる結合損失エネルギー及び枝構造で逸散する損失エネルギーの両エネルギーをモデル化対象要素に含めて等価内部損失率²⁾を算定して，枝構造なしの等価板要素に換算した。

- (c) モデル化は喫水線以下を密に喫水線より上部を粗にした。

- (d) 板要素の他，機関室，軸室，空調機室の空間を直方体の空間要素として設けた。

以上により「なつしま」をモデル化した結果，要素総数は船全体で約900となった。

(2) 解析ケース

本書に示す「なつしま」のSEA解析は補助発電機運転時を選定した。これは，同機が防振支持されていないため，船体構造に伝わる振動が比較的大きく暗振動とのS/Nが問題となる実測値との比較が容易なためである。この状態での各補機の作動状況を表1に示す。

なお，解析を行う周波数は，中心周波数4，8，16kHzの1/3オクターブバンドとした。

(3) 機器起振力

SEAモデルに入力する機器起振力相当の外力は3.(2)項に示した「なつしま」で実測した各機器基部要素の機器作動時の振動を振動エネルギーに変換して与えた。表2にSEAモデルに入力した機器台基部の振動加速度を示す。

(4) 要素の諸係数（付録参照）

- (a) 各要素の辺長，ヤング率，密度，音速等の固有特性を与えた後，各要素毎に結合する要素番号を定義し，それらの結合辺長，結合形式等を与えた。

- (b) 内部損失率は鋼板の内部損失として3.(1)項で示した「なつしま」の実測値を基にした値に，枝構造で逸散する損失エネルギーを要素の内部損失に換算した値を加えて与えた。

- (c) 喫水以下の接水要素は片面接水とみなした

海水の付加質量を考慮した。すなわち付加質量は、モデル密度が固有振動数の低下分だけ高くなるものとして取り扱った。

ただし、燃料タンク及びバラストタンク内の水あるいは油は、計測時の状態が不確定のため考慮していない。

表1 解析対象ケースの作動機器
Table 1 Operating condition of installed equipment

No.	機器名称	運転台数	装 備 場 所	主 要 目
1	No.2 主発電機関	1	機関室、二重底上左舷、Fr39~Fr46 (防振支持)	4 サイクルディーゼル機関、595ps × 900rpm
2	補助発電機関	1	機関室、二重底上右舷、Fr39~Fr46 (直据付)	4 サイクルディーゼル機関、300ps × 900rpm
3	補助ボイラ	1	機関室、二重底上右舷、Fr37~Fr40 (防振支持)	モノチューブ式、1.2ton/h
4	No.1 海水サービスポンプ	1	機関室、二重底上左舷、Fr37~Fr38 (防振支持)	立形渦巻式、90m ³ /h × 20mT. II.
5	No.2 空調用冷凍機ユニット	1	空調機室、二重底上右舷、Fr55~Fr58 (防振支持)	能力 85,300kcal/h
6	No.1 糧食用冷凍機	1	空調機室、二重底上右舷、Fr65~Fr67 (防振支持)	能力 3,900kcal/h
7	飲料水ポンプ	1	空調機室、二重底上左舷、Fr57~Fr58 (直据付)	立形渦巻式 5m ³ /h × 50mT. II. (飲料水圧力タンクに装備)
8	温水循環ポンプ	1	機関室、第2甲板上右舷、Fr29 (直据付)	横形渦巻式、2m ³ /h × 5mT. II.
9	機関室通風機	1	機関室、端艇甲板中央、Fr45~Fr46 (直据付)	立形軸流式、250 m ³ /min × 30mmAq
10	軸路通風機	1	軸室、上甲板上左舷、Fr23~Fr24 (直据付)	立形軸流式、30m ³ /min × 20mmAq

表2 SEAモデルに入力した機器台基部の振動加速度
Table 2 Input acceleration value to SEA model of installed equipment

機 器 名 称	1/3 オクターブ中心周波数		
	4 K H Z	8 K H Z	16 K H Z
NO. 2 主 発 電 機 関 (ENG側)	1 6	1 2	6
同 上 (GEN側)	6	2	- 1
補 助 発 電 機 関 (ENG側)	3 2	2 4	2 0
同 上 (GEN側)	2 7	2 1	1 5
補 助 ボ イ ラ	9	2	3
NO. 1 海 水 サ ー ビ ス ポ ン プ	2 7	1 5	7
NO. 2 空 調 用 冷 凍 機 ユ ニ ッ ト	2	- 1	4
NO. 1 糧 食 庫 用 冷 凍 機	1 0	4	0
(注) 1. 本図に示す数値は各補機作動時の機器台基部の振動加速度を示す。 2. 単位はdB(0dB//1gal) 3. 本図に示す以外に作動する補機はその起振力が本図の補機に比べ非常に小さいため省略した。			

(5) 振動レベルの計算法

振動応答を各モデル化対象要素のもつ共振モードの重ねあわせとして表せると考え、要素間に流れるエネルギーの平衡条件から各要素の振動応答を求めた。(図1参照)

(6) 水中放射雑音の計算法(付録参照)

喫水以下の船体外板の振動レベルを、各SEA板要素毎に、音響放射効率を用いて水中放射音パワーレベルに変換した。水中における音響放射効率はMaidanikの式³⁾を用いた。

また、特定位置での音圧レベルの計算は、喫水以下の船体外板の各SEA要素を水中面音源と考え各面音源は位相がランダムな点音源と仮定し、各点音源から受音点位置まで半球面拡散するものとして計算した。

なお、この方法では受音点位置が面音源に近い場合には大きな誤差を生じる可能性があるため、受音点位置の直上あるいは直横の板要素だけは面音源として取扱った。ただし、各点音源は、無指向性とした。

5. 「なつしま」のSEA解析結果及び考察

4項の要領で「なつしま」の固体伝搬雑音(振動及び水中放射雑音)を計算した結果と、実測値とを比較して以下に示す。

外板振動及び水中放射雑音の実測値は、「なつしま」建造当時これらをペアで船首尾方向にシリーズで実測した結果を用いている。

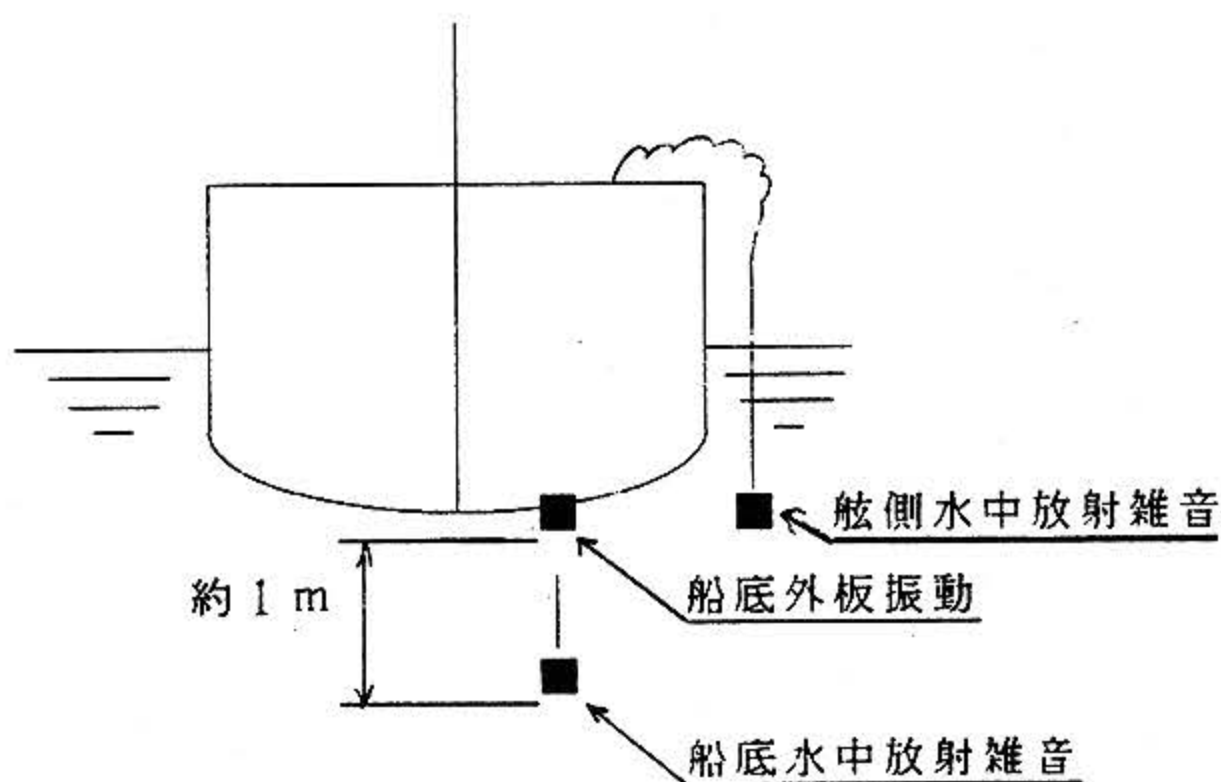


図6 振動及び水中放射雑音計測位置
Fig.6 Measured location of Vibration and noise

(1) 振動

船底外板(図6参照)の振動レベルをSEA解析値と実測値とを比較して図7に示す。

解析結果に対する考察を下記に示す。

(a) 4, 8 kHzの解析結果については、起振機器近傍(補助発電機近傍)のピーク及び船首尾方向の振動分布はレベル、傾向共極めてよく一致している。

(b) 16 kHzの解析結果については、ピークはよく一致しているものの船首尾部の機器振動がかなり減衰した箇所において差異がみられる。

これは当該部の振動レベルが、他に比べてかなり低く、暗振動レベルより低くなった結果暗振動を含む実測値との差異がみられるものと考えられる。

(c) 以上により、SEAモデルに入力する外力としては本書に示すように機器台基部の振動実測値を用い、内部損失は実測値から逆算した値を用いて、本書に示す方法でSEA解析を行うと、新母船で雑音低減が必要な周波数範囲において実用上十分な精度でその振動レベルが予測できることがわかった。

(2) 水中放射雑音

船底外板近傍及び舷側(図6参照)の水中放射雑音レベルをSEA解析値と実測値とで比較して図8及び図9に示す。

解析結果に対する考察を以下に示す。

(a) SEA解析値はMaidanikによる音響放射効率に対し、板の境界条件を周辺支持と周辺固定の中間として、周辺支持として得られた値に $\sqrt{2}$ 倍した他、下記の配慮を行った。これはMaidanikによる音響放射効率により水中放射雑音を計算した場合、全体的に実測値より過少評価となり、実測値との差が周波数が高くなるに従い大きくなるためである。すなわちこれは、臨界周波数以下での周波数増加に伴う音響放射効率の漸増傾向がMaidanikの式より急であることを示すものであり、実際より臨界周波数を高く見積り過ぎている可能性を示す。これは臨界周波数計算値が無窮遠にある平板の曲げ波の伝搬速度を用いて計算されるため実際には、フレームで

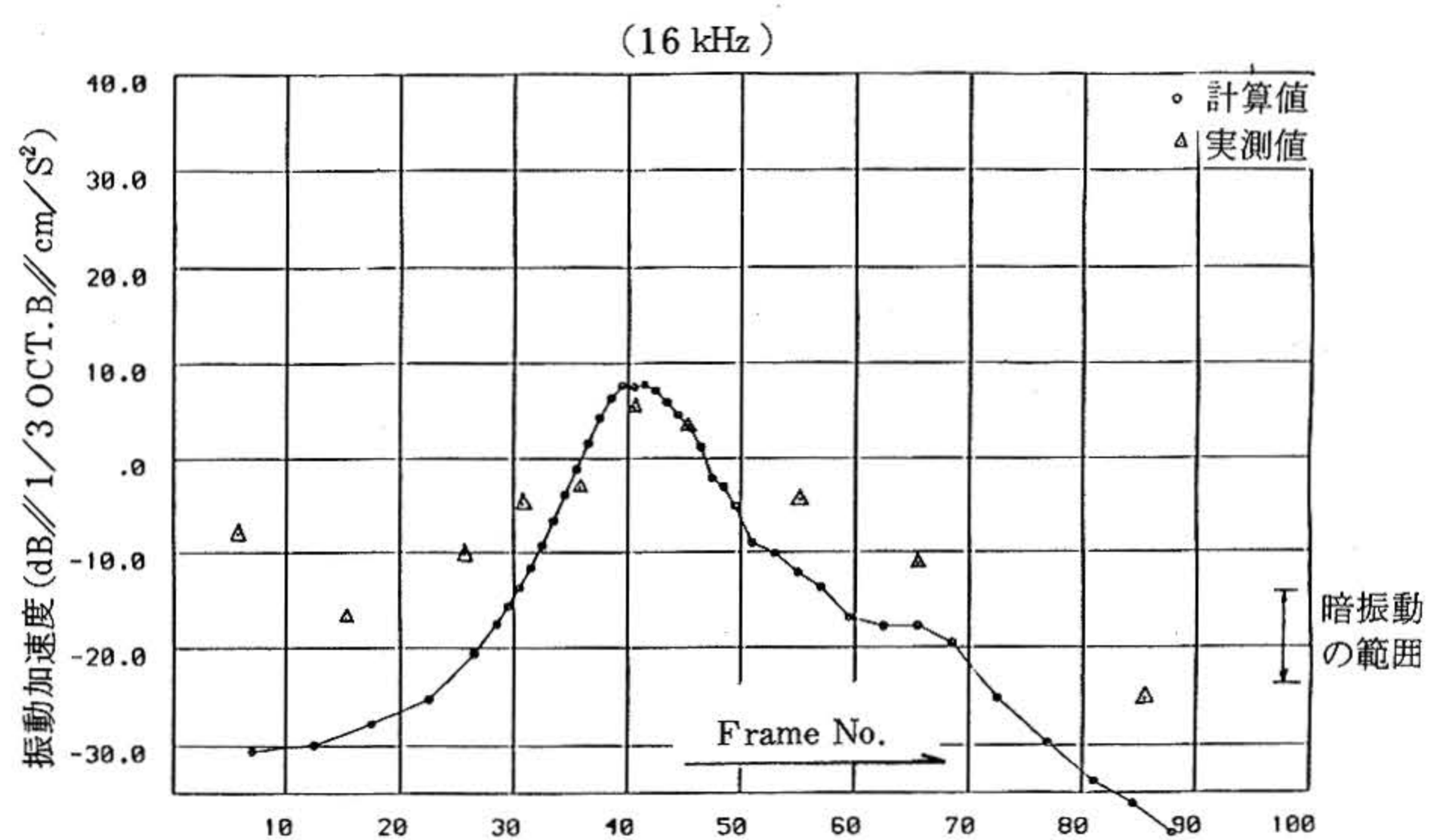
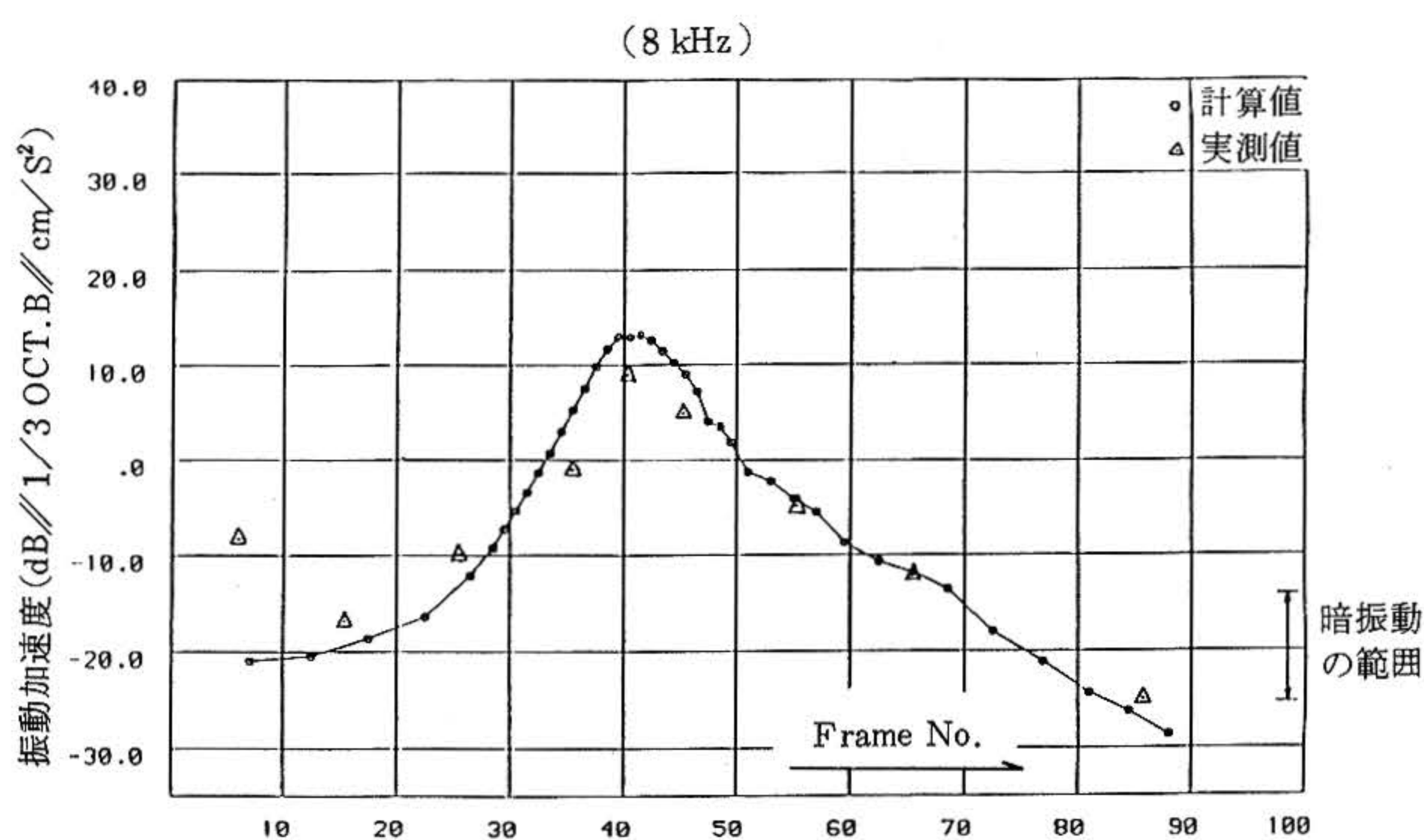
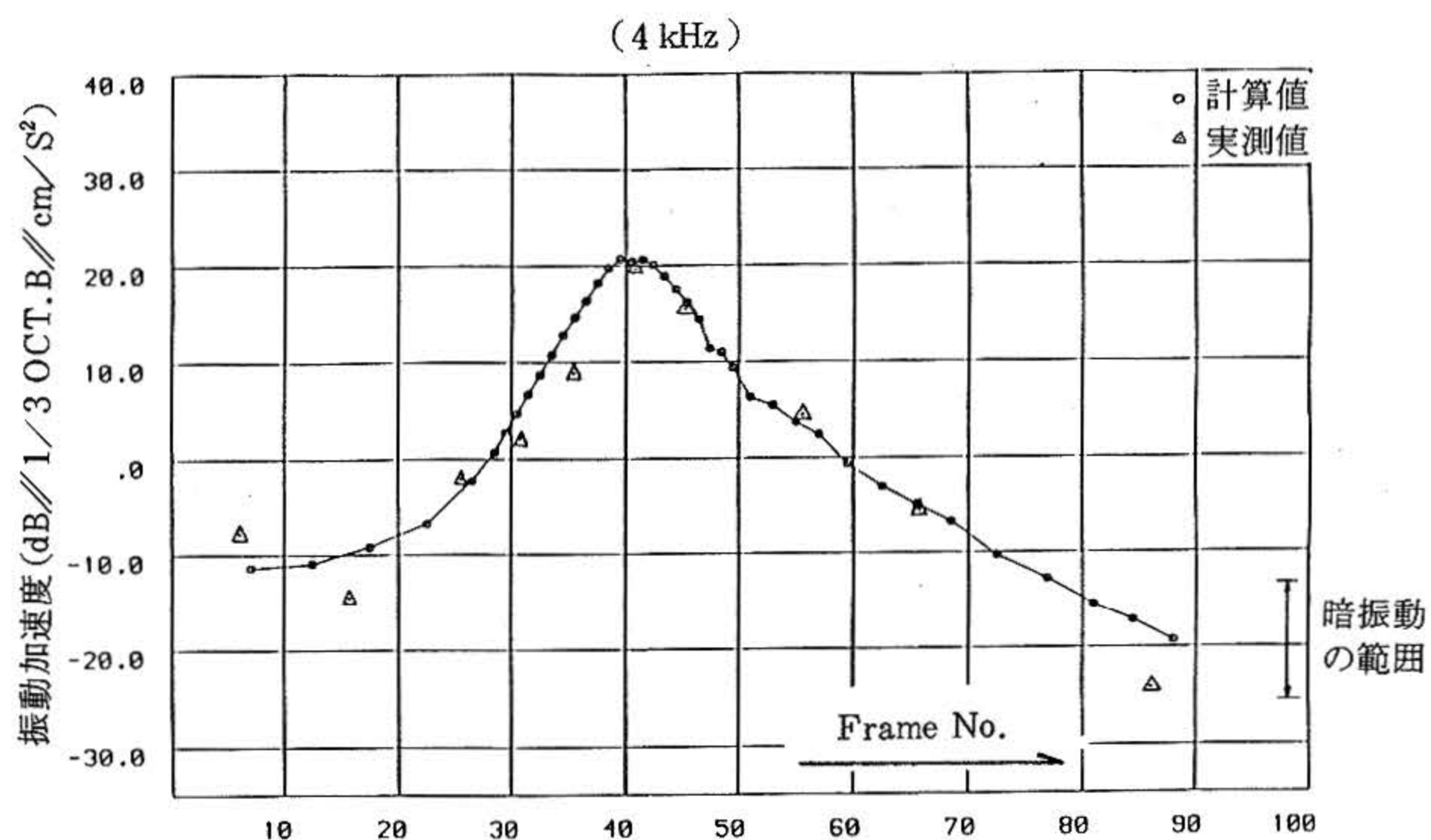


図7 船底外板振動レベル
Fig.7 Vibration level of outer bottom plate

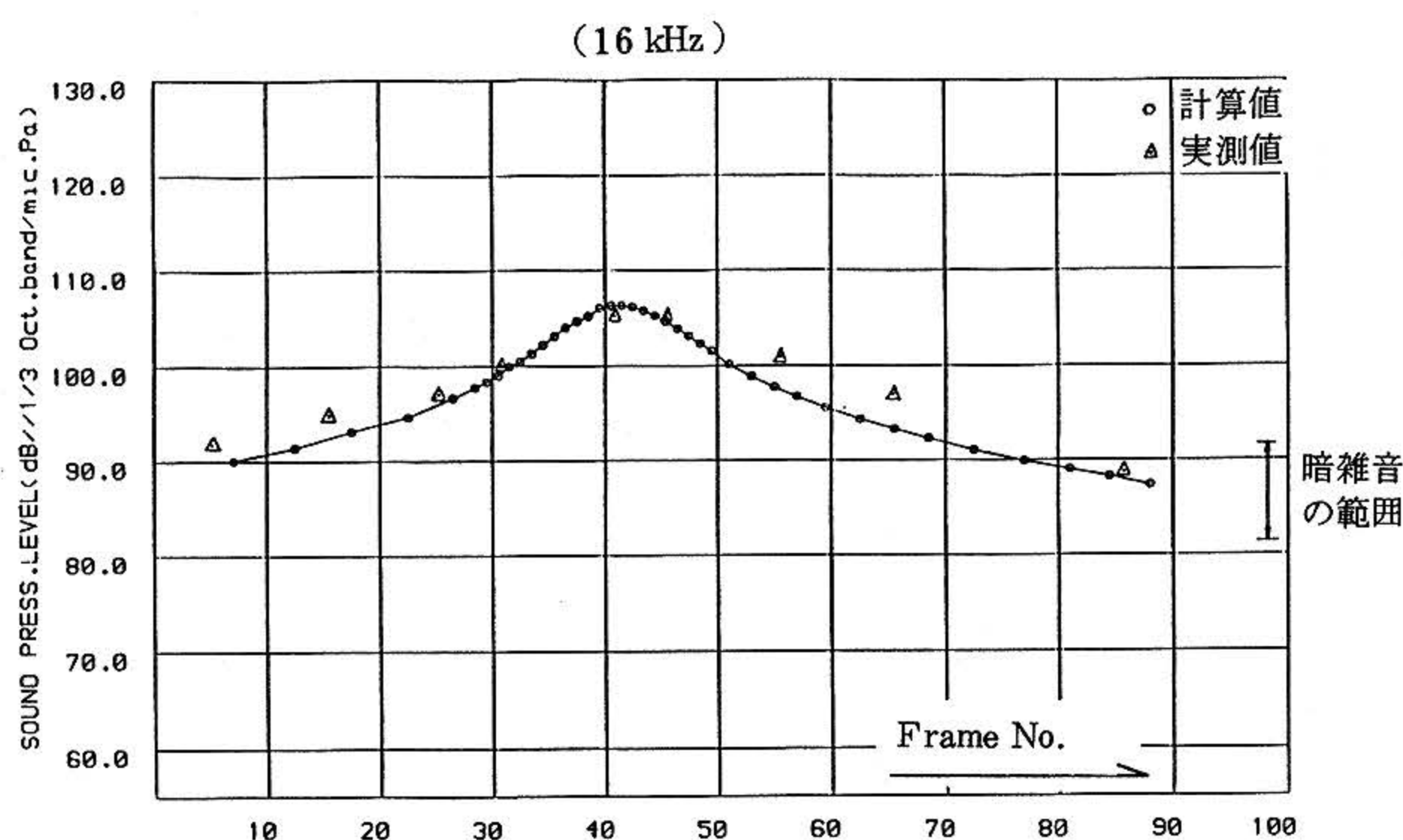
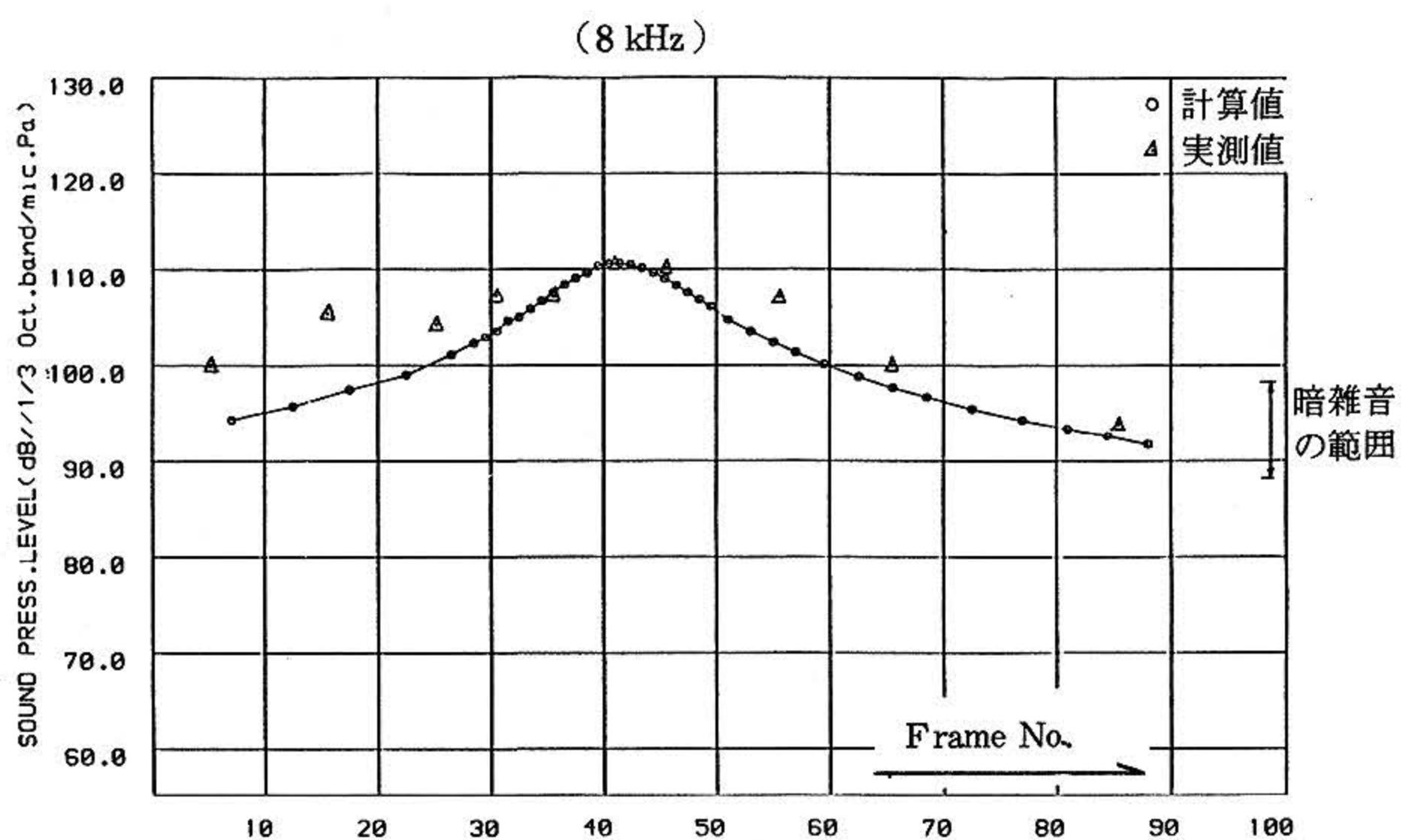
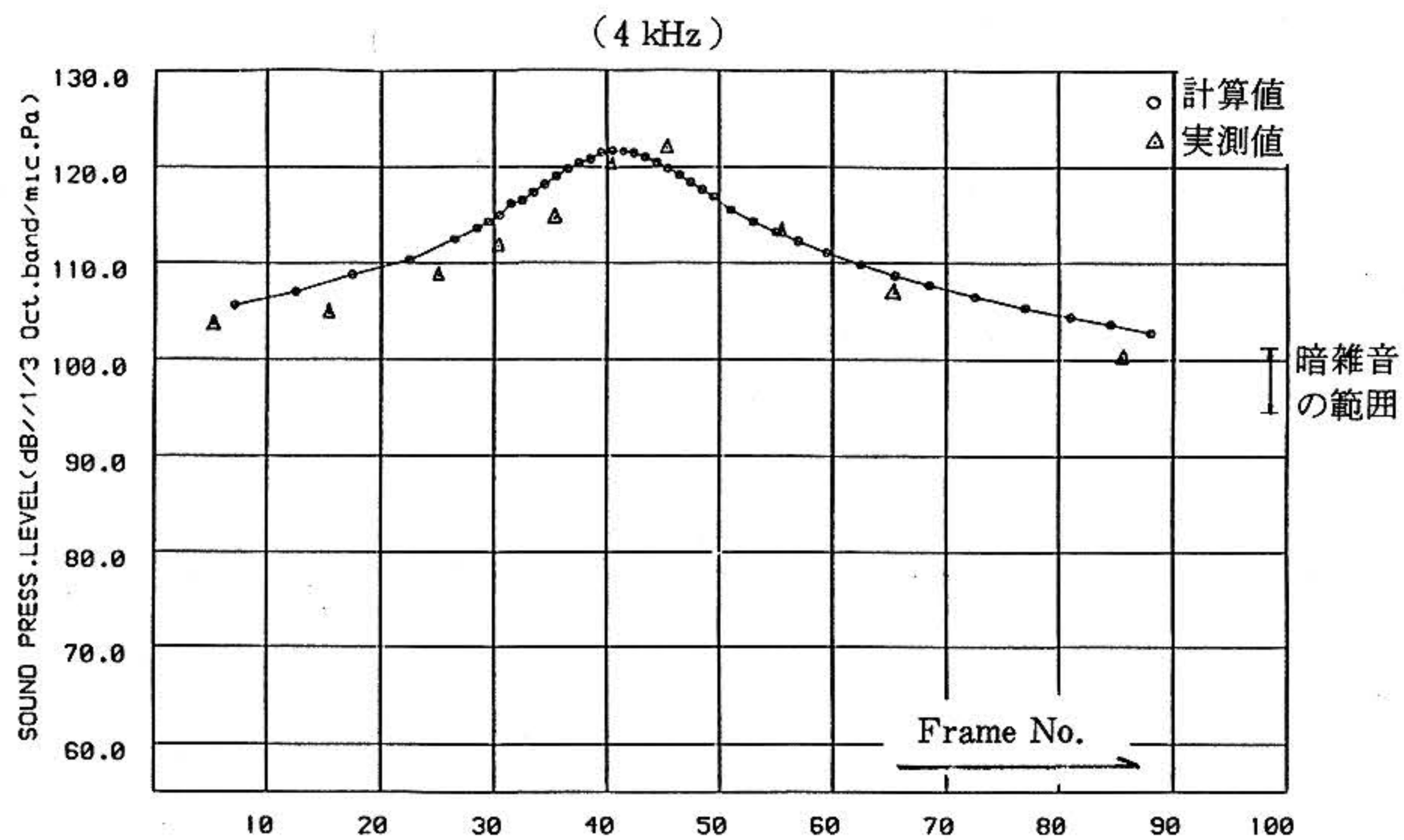


図8 船底外板近傍の水中放射雑音
Fig.8 S.P.L. near outer bottom plate

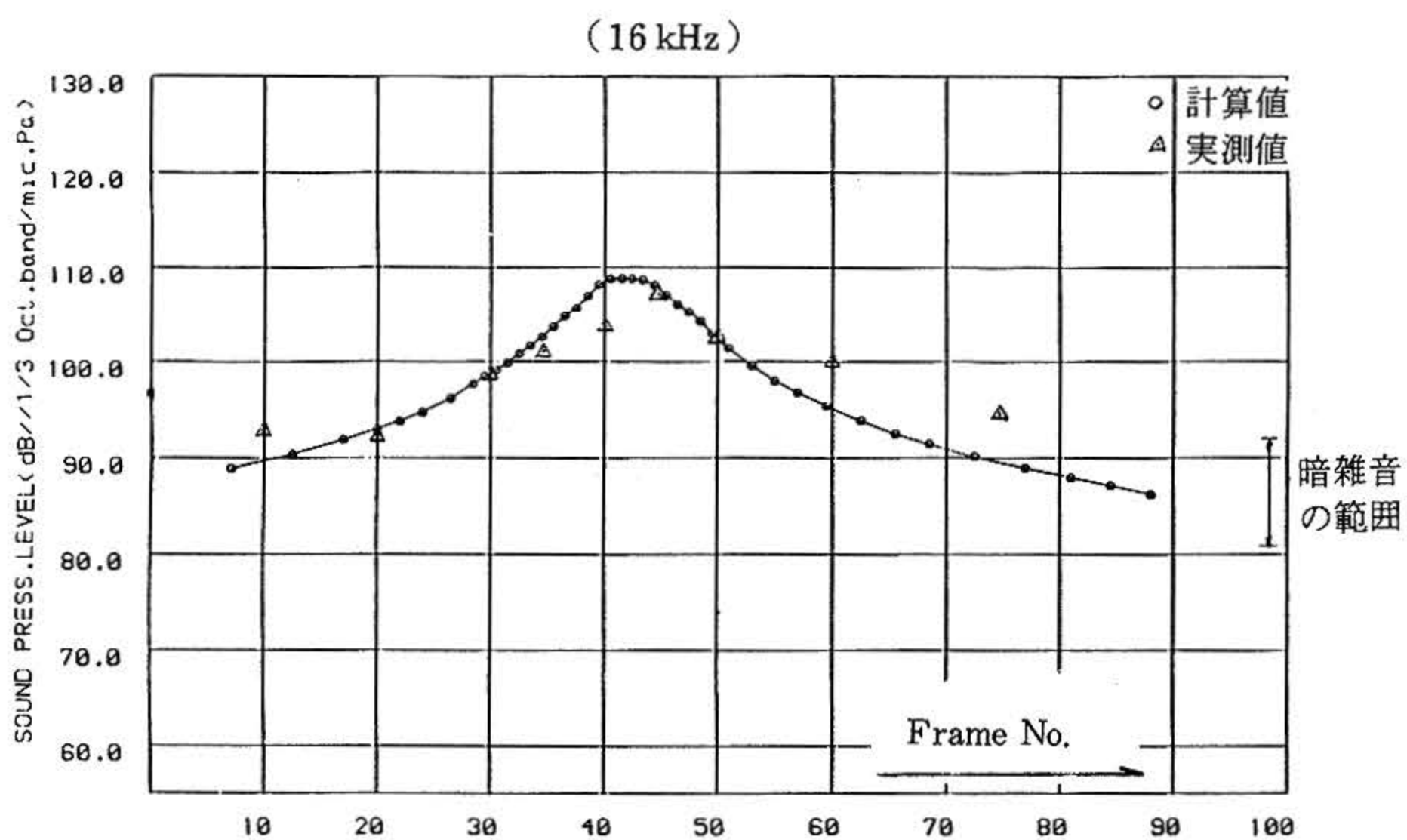
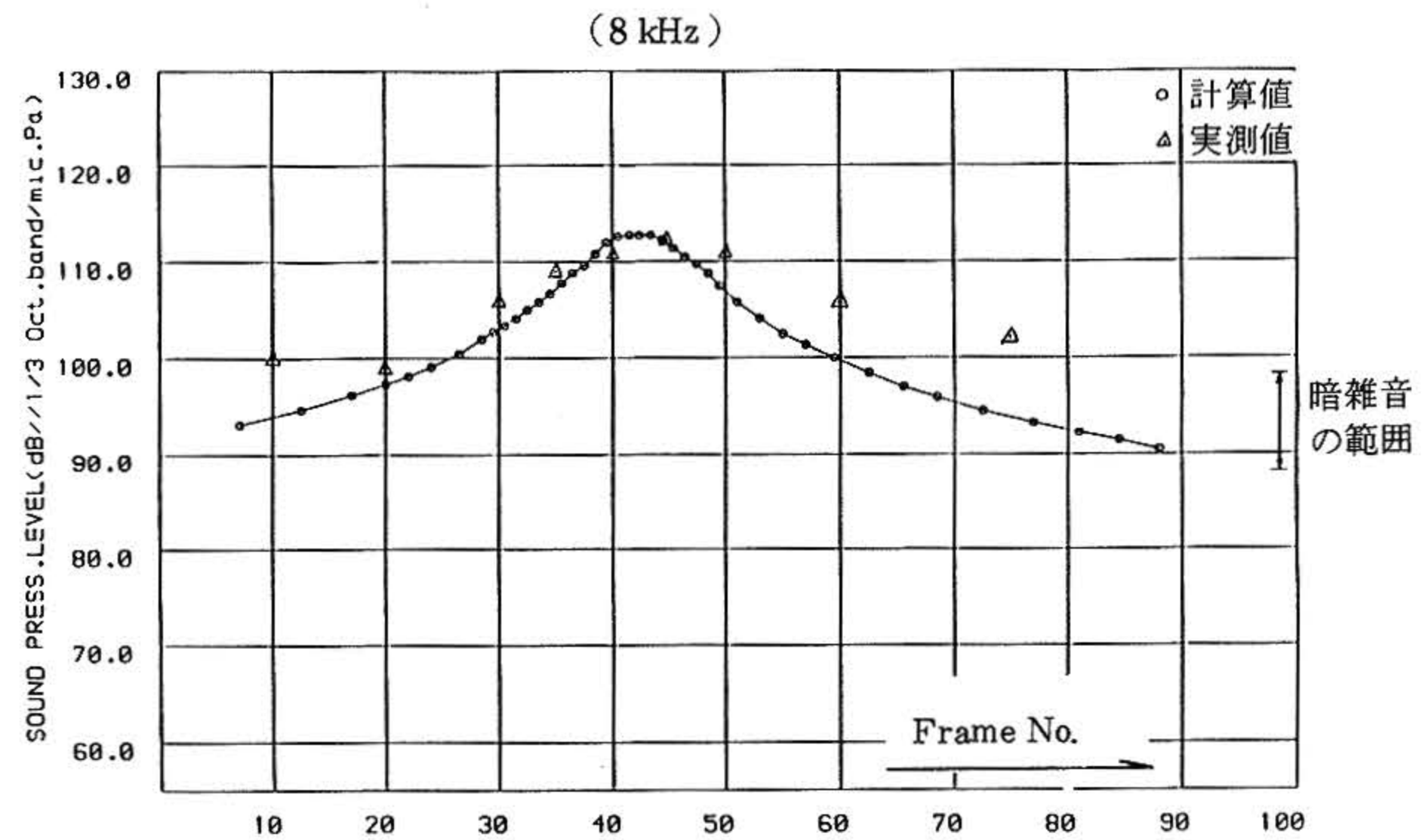
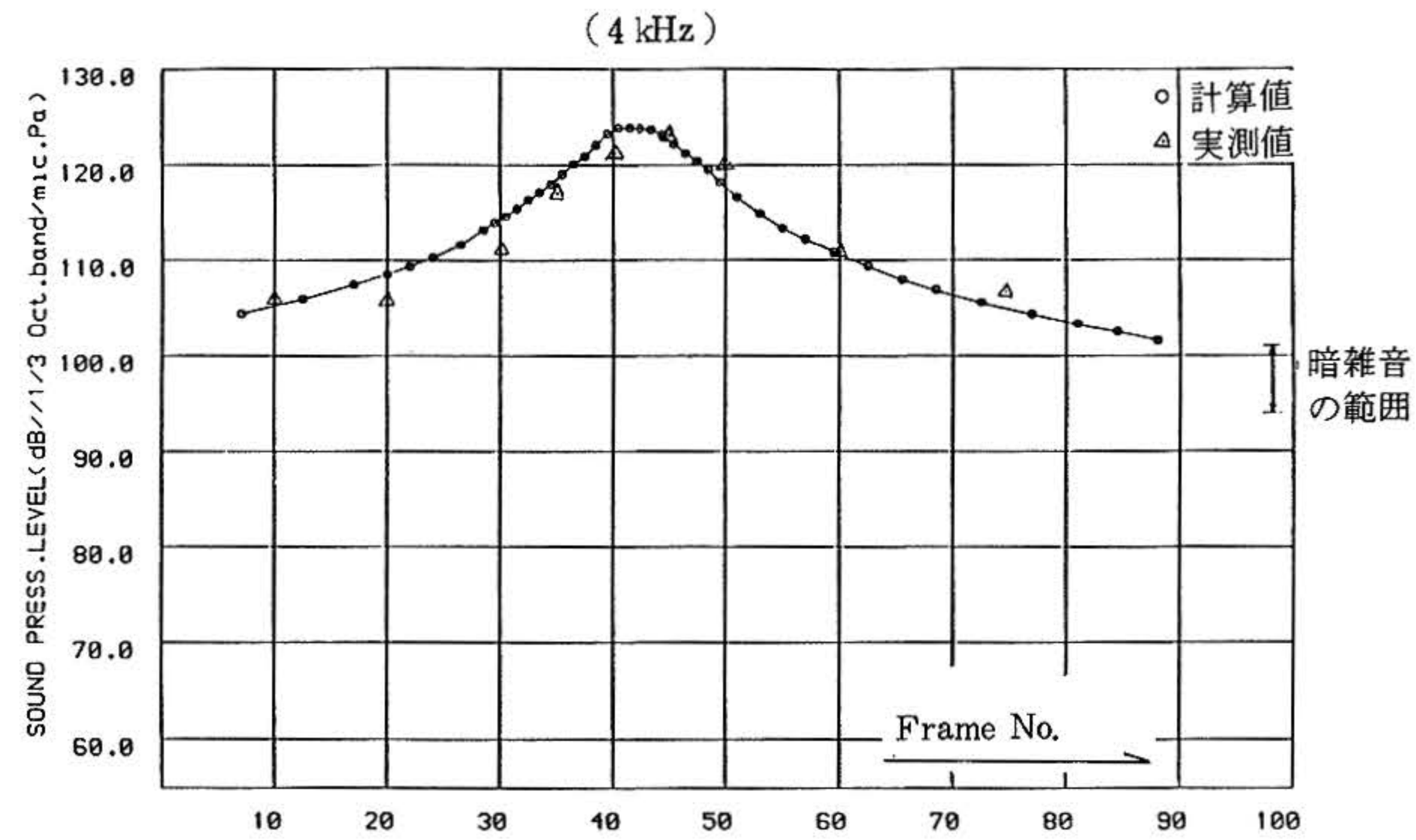


図9 舷側の中放射雑音
Fig.9 S.P.L. near side shell plate

固定され補強リブ等があるため、あるいは曲面となっているため、計算値より臨界周波数が低くなると考えられる。そこで、臨界周波数を求める下式中の板厚項について、補強材等によりみかけの板厚が厚くなり、そのため臨界周波数が低くなるという考えをとった。

$$f_c = \frac{C_w^2 \cdot m}{2\pi \cdot D}$$

$$= \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot C_w^2}{\pi \cdot C_p \cdot h}$$

f_c : 臨界周波数

C_w : 水中の音速

m : 鋼板の面密度

D : 鋼板の曲げ剛性

C_p : 鋼板中の縦波の伝搬速度

C_p : $\sqrt{E/\rho}$

E : 鋼板のヤング率

ρ : 鋼板の密度

h : 鋼板の板厚 (等価板厚)

ν : 鋼板のポアソン比

等価板厚は合理的な算出方法が確立されていないため、実測水中放射雑音とよく一致するよう、繰り返し計算を行い実際の板厚の1.25倍とした。すなわち f_c の修正係数として0.8を臨界周波数計算値に乗じたことになる。

なお、実際の船体外板板厚の1.25倍というのは、外板に直接溶接取り付けさせているフレームや補強リブ等の総重量の15%程度が付加された板厚に相当するものである。音響放射効率の計算結果を図10に示している。

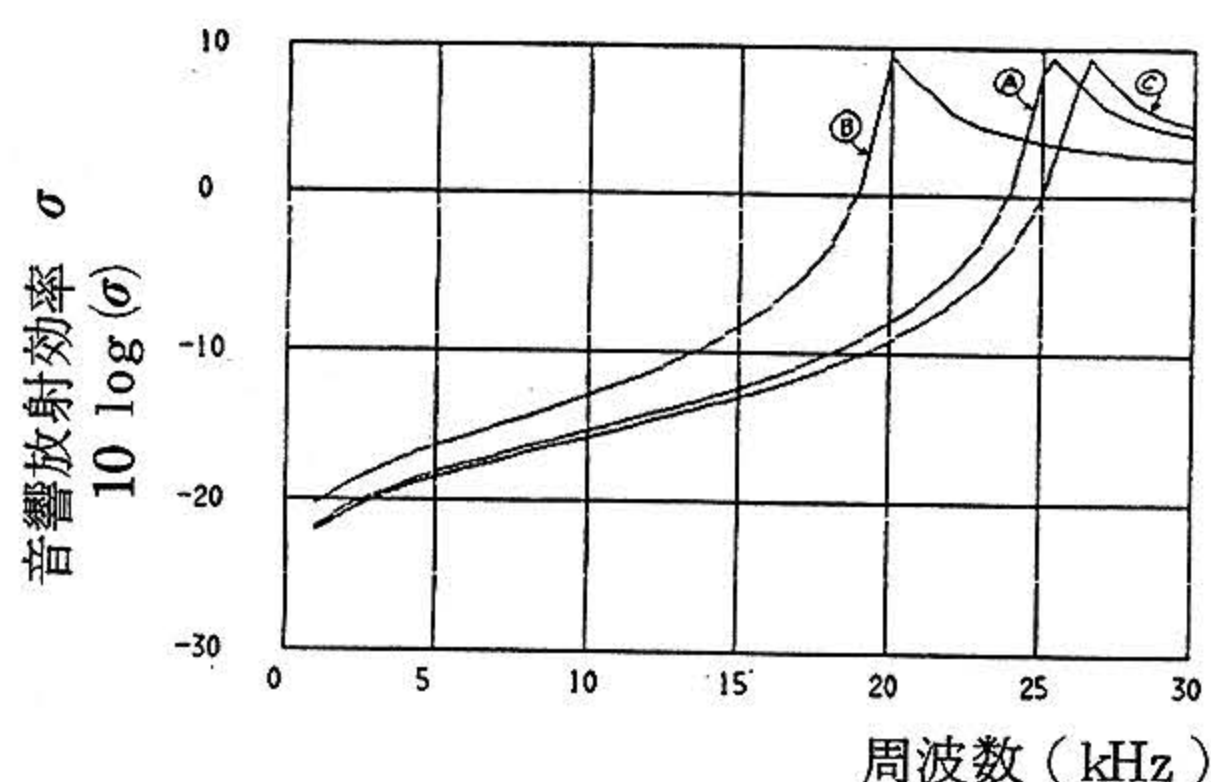
これにより、解析した周波数範囲において図8、9に示す如く、ほぼ解析値と実測値と一致をみることができた。

- (b) 船首尾方向への水中放射雑音の減衰傾向は、それに対応する振動の減衰傾向に比べかなりゆるやかである。

このことは、船体近傍の水中音はそのごく近傍の外板振動に起因するだけでなく起振機器近傍の相対的にレベルの高い外板振動が主要音源となり、これが水中に伝搬して船全体の水中放射雑音を支配しているものと考えられる。

- (c) 船首尾部の雑音はかなり減衰した箇所では振動と同様、暗雑音を含む実測値との差異が多少みられる。

これは振動と同様、当該部の振動レベルが他に比べかなり低く、暗振動レベル以下になった結果、暗振動を含む実測値との差異がみられるものと考えられる。



(注) 1. パネルサイズ

$L \times B \times t$: $650 \times 1,600 \times 9$ mm

2. 上表中の記号

① ; $f_c = f_c$ (f_c ; 付加水考慮せず)

② ; $f_c = 0.8 f_c$ (f_c ; 同上)

③ ; $f_c = f_c'$ (f_c' ; 付加水考慮したもの)

図10 Maïdanikの式による音響放射効率

Fig.10 Radiation ratio by Maïdanik

6. 新母船の固体伝搬雑音予測法

「なつしま」を用いてSEA法による固体伝搬雑音予測計算方法を検討した結果をもとにして、新母船の予測計算は下記の基本的な考えで実施することとする。

(1) 船全体をモデル化して本書に示す要領のSEA法で振動、水中放射雑音を計算すれば実用上十分な精度で予測できる。

(2) 新母船の主要構造様式は「なつしま」とほとんど同じであることから新母船のSEA解析では「なつしま」で実測値をもとに算出した内部損失率をそのまま使用する。

(3) 新母船に搭載する補機の振動加速度は、新母船の補機陸上振動試験結果と、「なつしま」搭載の補機陸上試験結果および船内振動試験結果などを用いて推定する。

更に、SEAモデルに入力する機器台基部の振動加速度は、新母船の機器台構造及び機器台の二重底又は、甲板への据付方法が各補機毎に「なつしま」とほとんど同じ様式であることから「なつしま」で実測した機器台のタイプ別振動減衰量（機器台基部／上面の振動レベル比）を用いて推定を行う。

(4) 音響放射効率は、「なつしま」実測値との比較において、精度向上を計った処置（5.(2)②項参照）を漸定的に新母船の雑音予測にも用いる。

7. あとがき

新母船の適切な雑音低減対策を実施する上で必要不可欠な水中放射雑音の予測のうち、固体伝搬雑音の予測にSEA法を適用するための方法を「なつしま」を用いて検討した結果実用上十分な精度で予測できることがわかった。

今後、本書に示す成果を新母船の低雑音化に役立てていく所存である。

文 献

- 1) 日本造船研究協会編，船内騒音に関する調査研究報告書，1976．
- 2) 蔦，織田，1982，多層立体構造物の振動伝搬解析法，日本機械学会論文集，48巻425号
- 3) L. L. Beranek, 1971, Noise and Vibration Control
- 4) 久山，1983．船舶音響（その1）
- 5) 日本造船研究協会編，船内騒音に関する調査研究報告書，1978．
- 6) Cremer L., Heckel M., 1973. Structure Borne Sound
- 7) 五十嵐，1975．音響と振動，共立出版
(原稿受理 1987年12月14日)

付録 SEA解析に用いる諸係数

1. 内部損失率 (η_i)

鋼板

本文 3.(1) 項参照

空間要素⁵⁾

$$\eta_i = \frac{C_a S_a \bar{\alpha}}{4 \omega V_a}$$

ただし V_a ; 室容積, S_a ; 室表面積

$\bar{\alpha}$; 室の平均吸音率 (= 0.1 とする)

C_c ; 空気中の音速, ω ; 角周波数

添字 "i" ; 要素番号

2. 結合損失率 (η_{ij})

板要素間⁶⁾

$$\eta_{ij} = \frac{C_{gi} \cdot \tau_{ij} \cdot L_{ij}}{\omega \pi S_i}$$

ただし, $C_{gi} (= 2 \cdot 4 \sqrt{D_i \omega^2 / m_i})$

; 曲げ波の群速度

D_i ; 板の曲げ剛性

m_i ; 板の面密度

τ_{ij} ; 斜め入射波に対する平均
透過率

(付表 1 参照)

L_{ij} ; 結合辺の長さ,

S_i ; 板の面積

板要素空間要素間⁶⁾

$$\eta_{ij} = \frac{\rho_a C_a \sigma}{\omega m_i}$$

ただし, ρ_a ; 空気の密度

σ ; 音響放射効率

(Maidanik の式による)

C_a ; 空気中の音速

3. モーダル密度 ($\Delta N_i / \Delta \omega$)

板要素³⁾

$$\frac{\Delta N_i}{\Delta \omega} = \frac{S_i}{4 \pi} \sqrt{\frac{m_i}{D_i}}$$

空間要素⁷⁾

$$\frac{\Delta N_i}{\Delta \omega} = \frac{V_a}{2 \pi^2 C_a^2} \omega^2 + \frac{S_a}{8 \pi C_a^2} \omega + \frac{L_a}{16 \pi C_a}$$

ただし, L_a ; 直方体空間要素の辺長の総和

4. 音響放射効率: σ ³⁾

$f < f_c$ の場合:

$$\sigma = \frac{\lambda_c^2}{S} g_1(\alpha) + \frac{L \lambda_c}{S} g_2(\alpha)$$

$$g_1(\alpha) = \frac{8}{\pi^4} \frac{(1-2\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)^{1/2}} \quad (f < f_c/2)$$

$$= 0 \quad (f > f_c/2)$$

$$g_2(\alpha) = \frac{1}{4 \pi^2} \left[\frac{(1-\alpha^2) \ln \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) + 2\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}} \right]$$

$f = f_c$ の場合:

$$\sigma = \left(\frac{L_x}{\lambda_c} \right)^{1/2} + \left(\frac{L_y}{\lambda_c} \right)^{1/2}$$

$f > f_c$ の場合:

$$\sigma = (1 - f_c / f)^{-1/2}$$

ただし, $f_c (= \frac{C_w^2}{2 \pi} m_i / D_i)$; 限界周波数

C_w ; 水中の音速

L_x, L_y ; 板の 2 辺長

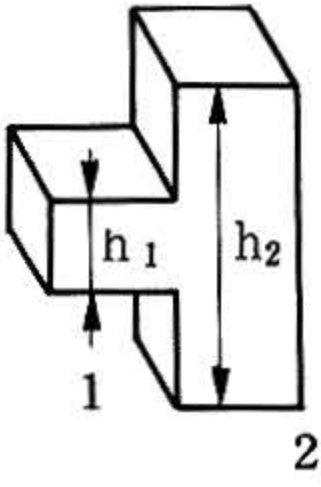
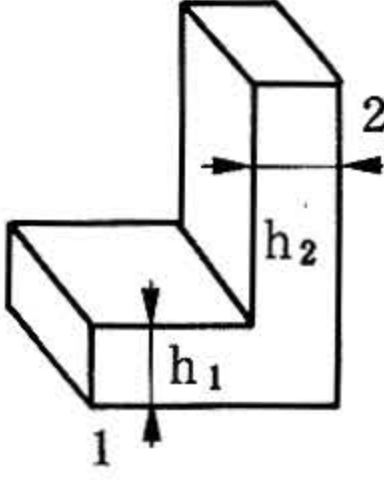
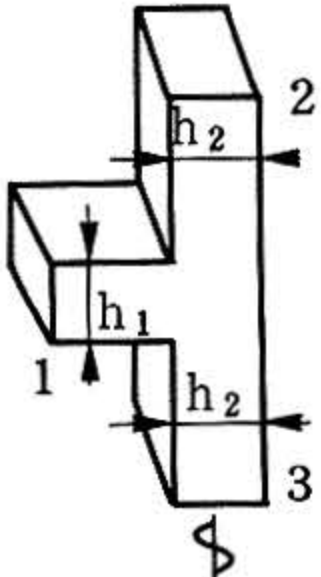
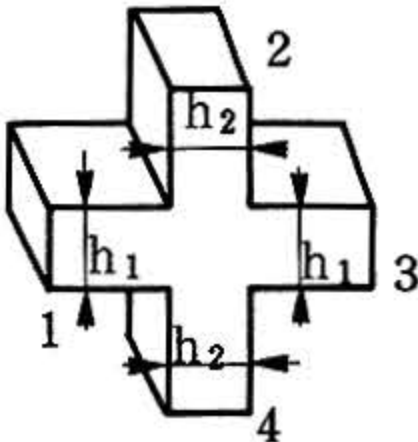
L ; 板の全長

S ; 板の面積

α ; $(f / f_c)^{1/2}$

λ_c ; 限界周波数におけるパネ
ルの曲げ波の波長

付表1 結合型式と透過率

結合型式	透過率 τ_{ij}	
 (一 型)	$\tau_{12} = \left[\frac{2\sqrt{K}\phi(1+K)(1+\phi)}{K(1+\phi)^2 + 2\phi(1+K^2)} \right]^2$ 1, 2が同質材のとき $\tau_{12} = \left[\frac{\beta^{-5/4} + \beta^{-3/4} + \beta^{3/4} + \beta^{5/4}}{\frac{1}{2}\beta^{-2} + \beta^{-1/2} + 1 + \beta^{-1/2} + \frac{1}{2}\beta^2} \right]^2$	$K = \left(\frac{m_2 D_1}{m_1 D_2} \right)^{1/4}$ $\phi = \left(\frac{m_2 D_2}{m_1 D_1} \right)^{1/2}$ $\beta = h_2 / h_1$ m_i ; 板 i の面密度 D_i ; 板 i の曲げ剛性 h_i ; 板 i の厚さ
 (L 型)	$\tau_{12} = \frac{2K\phi}{(K+\phi)^2}$ 1, 2が同質材のとき $\tau_{12} = \frac{2}{(\beta^{-5/4} + \beta^{5/4})^2}$	
 (T 型)	$\tau_{12} = \{ (\phi/2K)^{-1/2} + (\phi/2K)^{1/2} \}^{-2}$ $\tau_{23} = \{ 2 + 2(\phi/K) + \frac{1}{2}(\phi/2K)^2 \}^{-1}$ 1, 2が同質材のとき $\tau_{12} = (2\beta^{-5/2} + 2 + \frac{1}{2}\beta^{5/2})^{-1}$ $\tau_{23} = (2 + 2\beta^{5/2} + \frac{1}{2}\beta^5)^{-1}$	
 (+ 型)	$\tau_{12} = 0.5 \{ (\phi/K)^{1/2} + (K/\phi)^{1/2} \}^{-2}$ $\tau_{13} = 0.5 \{ 1 + (\phi/K) \}^{-2}$ 1, 2が同質材のとき $\tau_{12} = 0.5 (\beta^{-5/4} + \beta^{5/4})^{-2}$ $\tau_{13} = 0.5 (1 + \beta^{5/2})^{-2}$	