

海面のマイクロ波放射特性に関する研究(第6報) — 航空機観測データの解析法の研究 —

佐々木保徳^{*1} 浅沼市男^{*1}

宗山 敬^{*1} 内藤玄一^{*2}

本研究は、航空機による海面のマイクロ波放射観測データの解析法の研究を目的とする。

航空機や人工衛星をプラットフォームとする海面のマイクロ波放射観測において考慮しなければならないもののうち、主なものは、

- ① プラットフォームの3次元姿勢
- ② 偏波の回転(または混合)効果
- ③ サイドロープ効果
- ④ 大気放射の効果
- ⑤ 海面反射の効果

などである。このうち、本報告では①および②を考慮してアンテナ温度を評価する方法につき報告する。

また、本報告中の解析法によるアンテナ温度の推定値は、航空機により観測したアンテナ温度と比較した(18, 6 GHz)。その結果、観測値には大気放射の効果や海面反射の効果が含まれているが、これらを考慮すれば推定値と観測値との関係は十分説明できることがわかった。

キーワード：自然放射マイクロ波，マイクロ波ラジオメトリー，水平／垂直偏波，輝度温度，アンテナ温度，偏波の回転

Studies on the Properties of Microwave Emission of the Sea Surface (6th Report) — Analytical Study of Aircraft-observed Data —

Yasunori SASAKI^{*3}
Kei MUNEYAMA^{*3}

Ichio ASANUMA^{*3}
Gen'ichi NAITO^{*4}

The purpose of this work is to study analytical methods for aircraft-observed data of sea surface microwave emission. Some typical effects, which we

*1 海洋開発研究部

*2 国立防災科学技術センター平塚支所(沿岸防災第2研究室長)

*3 Marine Research and Technology Department

*4 Hiratsuka Branch, National Center for Disaster Prevention

must take into account in sea surface microwave radiometric observation from platforms such as aircraft or satellites, are e.g.

- (1) Tri-axial attitude of the platform (Motion of the platform)
- (2) Rotation effect (Mixing effect) of polarization
- (3) Side lobe effect
- (4) Sea surface reflection of sky radiation

This paper discusses how to estimate the antenna temperature theoretically, taking into account the effects (1) and (2) of the above four effects.

Comparison of the antenna temperature is also made between predicted and aircraft-observed results at 18.6 GHz. This comparison revealed that the aircraft-observed result contained the effects of atmosphere and sea surface reflection, however, a reasonable antenna temperature due only to inherent sea surface emission would be retrieved from aircraft data, applying corrections to these two effects.

Key word: microwave radiometry, polarization effect, motion of platform.

1. はじめに

マイクロ波放射計により海洋観測を行う場合、航空機や人工衛星による観測は地上に固定した観測とは異なり、プラットフォームの動揺の影響を大きく受ける。

その理由は、①海面からの可視光や赤外線放射は観測角にほとんどよらないのに対して、マイクロ波放射は非常に強い観測角依存性を有すること、②可視光や赤外線は偏波別に観測することは少ないのに対して、マイクロ波放射は通常、水平偏波および垂直偏波に分けて観測され、これら両偏波の偏波面はアンテナと、海面の各偏波放射の間ではズレ（偏波面の回転効果という）を生じるが、もともとこの回転効果の大きさはアンテナ視野内の方向により変化するうえに、さらにプラットフォームの動揺により一層複雑な回転となること、③プラットフォームの動揺によりサイド・ローブ内の輝度温度（マイクロ波温度）分布も絶えず変化し、メイン・ローブのみが受信するマイクロ波放射によるアンテナ温度を回復するために行うサイド・ローブ効果補正に誤差が伴いやすいこと、等である。そして、航空機や人工衛星の動揺まで厳密に考慮してマイクロ波放射観測データを解析する方法を報告したものは今日まで見当たらない。

折しも、海洋科学技術センターでは、海洋広域観測技術の研究開発の一環として、航空機搭載型高分解能多周波マイクロ波放射計を開発中であり、将来は人工衛星による観測へと発展させる予定である。本研究は、これら将来の航空機や人工衛星による海洋観測へ応用することを目的として、航空機観測データの解析法の研究を行ったものである。

2. 理論および解析方法

ここでは、まず大気の効果がない場合を考える。このとき、海面を観測中のマイクロ波放射計のアンテナが受信するマイクロ波放射による輝度温度（アンテナ温度）は(1)式で与えられる。

$$T_{BP}(\theta_i) = \frac{\int_{4\pi} \left[T_{BV}^{env} (g_{ps} \cdot \cos^2 \beta_P + g_{pt} \cdot \sin^2 \beta_P) + T_{BH}^{env} (g_{pt} \cdot \cos^2 \beta_P + g_{ps} \cdot \sin^2 \beta_P) + (T_{BV}^{env} - T_{BH}^{env}) \cdot (g_{ps} \cdot g_{pt})^{\frac{1}{2}} \cdot \sin 2\beta_P \cdot \cos \alpha \right] \cdot d\Omega}{\int_{4\pi} (g_{ps} + g_{pt}) \cdot d\Omega} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで

$T_{BP}(\theta_i)$; アンテナ温度 (アンテナ輝度温度)
(K)

T_{BP}^{env} ; アンテナに入射する全方位の環境輝
度温度 (K)

θ_i ; アンテナ主軸の海面観測角

p ; 偏波の種類をあらわす添字

$p =$ H のとき ; 水平偏波

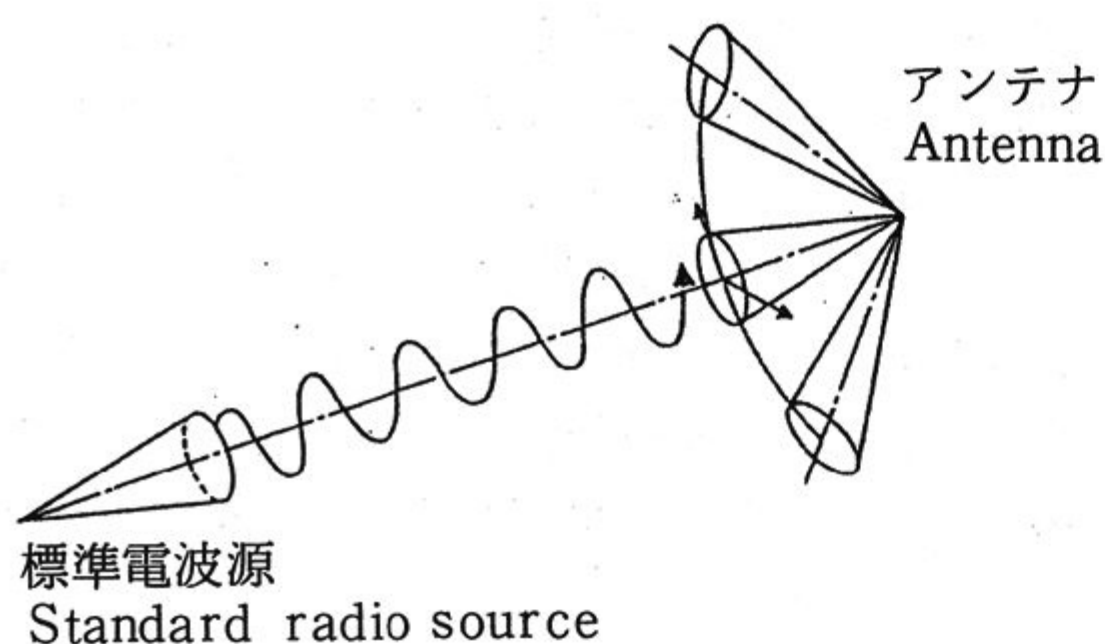
V のとき ; 垂直偏波

g_{pt} g_{ps} ; それぞれ垂直偏波面をもつアンテナ
の同相および交叉偏波に対する感度
(水平偏波に対しては逆になる)

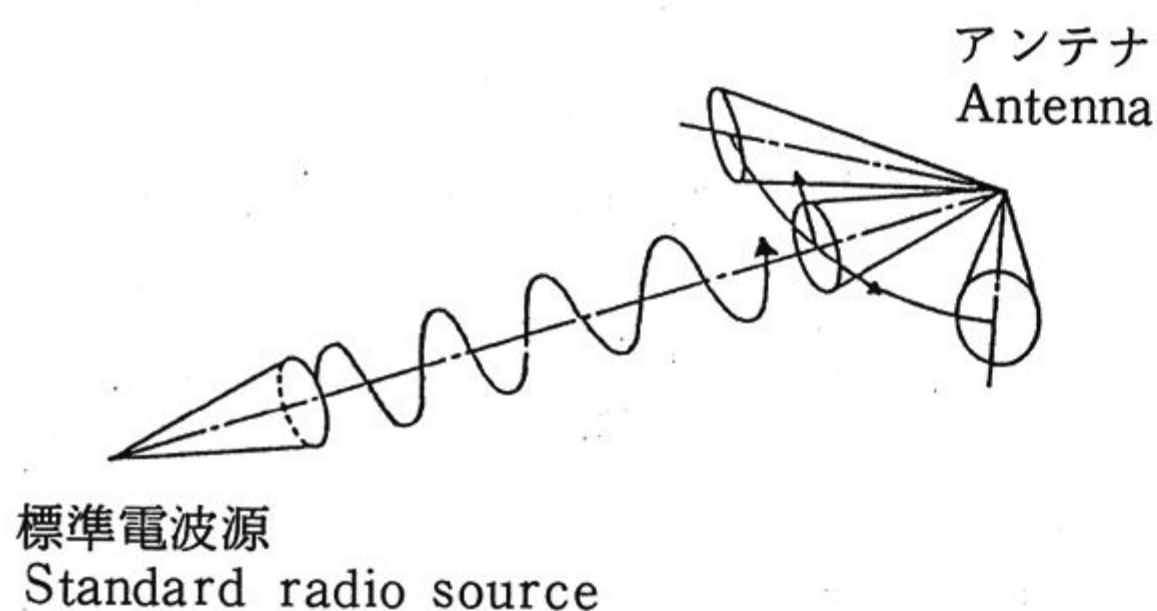
α ; 両偏波間の相対位相差角

Ω ; 立体角

である。偏波の回転効果が生じる理由を、垂直偏
波の場合を例にとって示すと以下のとおりである。



E-面のキャリブレーション
(a) Calibration in E-plane



H-面のキャリブレーション
(b) Calibration in H-plane

図 1 垂直偏波の場合のアンテナキャリブレーションの模式図(例)

Fig.1 Schematic sketch of antenna calibration for vertical polarization

図1は、直交する主2偏波面内におけるアンテナ受信感度 (アンテナ・パターン) 測定の原理を示したものである。電場の方向と磁場の方向は直交することから、通常、主2偏波面内におけるアンテナパターンは、それぞれ電場面内におけるアンテナ・パターン、磁場面内におけるアンテナ・パターンと呼ばれる。そして、これらの値 (感度) の大きさはアンテナ小軸方向で最も大きく、アンテナ主軸から遠ざかるにしたがって不規則変動を示しながら小さくなるのが通例である (ただし、無限に小さくなるわけではない)。このアンテナ・パターンを図に表わすと通常、葉状となることから、主軸方向のものは主葉 (メイン・ローブ)、アンテナ側方のものは側葉 (サイド・ローブ、アンテナ後方のものはバック・ローブと呼ぶこともあるが、ここではサイド・ローブに含める) と呼ぶ。このように、アンテナ前面だけでなく、側方からさらには後方にまで感度を有するのは、マイクロ波帯では波長が長いため、側方や後方からの放射が回折効果により受信されるためである。電場面内および磁場面におけるアンテナ・パターンはともにベクトル量で与えられ、それらをそれぞれ $\vec{E}_e$, $\vec{E}_h$ とすると、図2に示すようにアンテナ

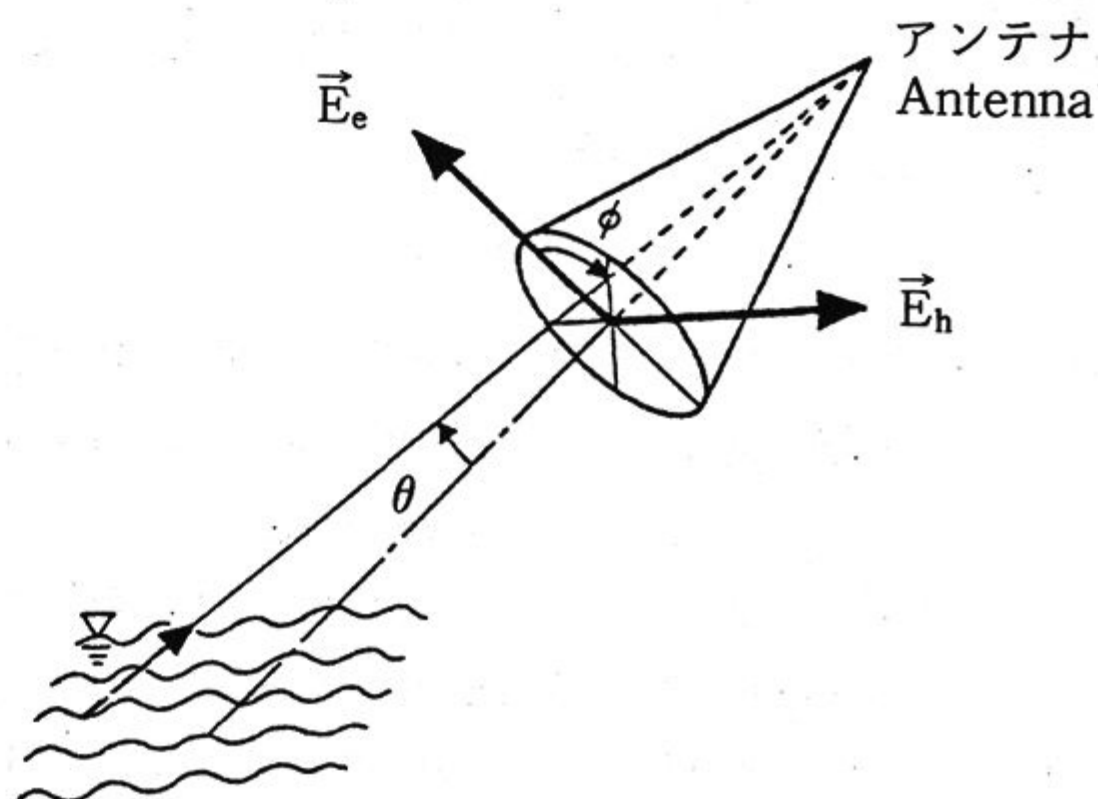


図 2 垂直偏波の場合の2つの主偏波の定義

Fig.2 Definition of two main polarized electric field for vertical polarization

視野内の任意の方向 ϕ の面内におけるアンテナの感度 $\vec{E}$ は(2)式で与えられる。

$$\vec{E} = \vec{E}_e \cdot \cos\phi + \vec{E}_h \cdot \sin\phi \quad \dots\dots(2)$$

(2)式は同相偏波に対する感度であるが、交叉偏波の場合も同様である。図3は、このようにキャリブレーションされたアンテナによる海面観測の様子を示したものである（ただし、 ϕ は図3とは逆の向きにとるのが通例である）。図3において、アンテナ視野内の任意の方向（ θ 、 ϕ ）におけるアンテナ自身のキャリブレーション時の垂直偏波面はabcdであるのに対して、（ θ 、 ϕ ）方向から来る海面放射の垂直偏波面はa'b'c'd'であり、両者の間にはズレがある。これが偏波面の回転（後に示すように、偏波の混合ということもできる）効果である。

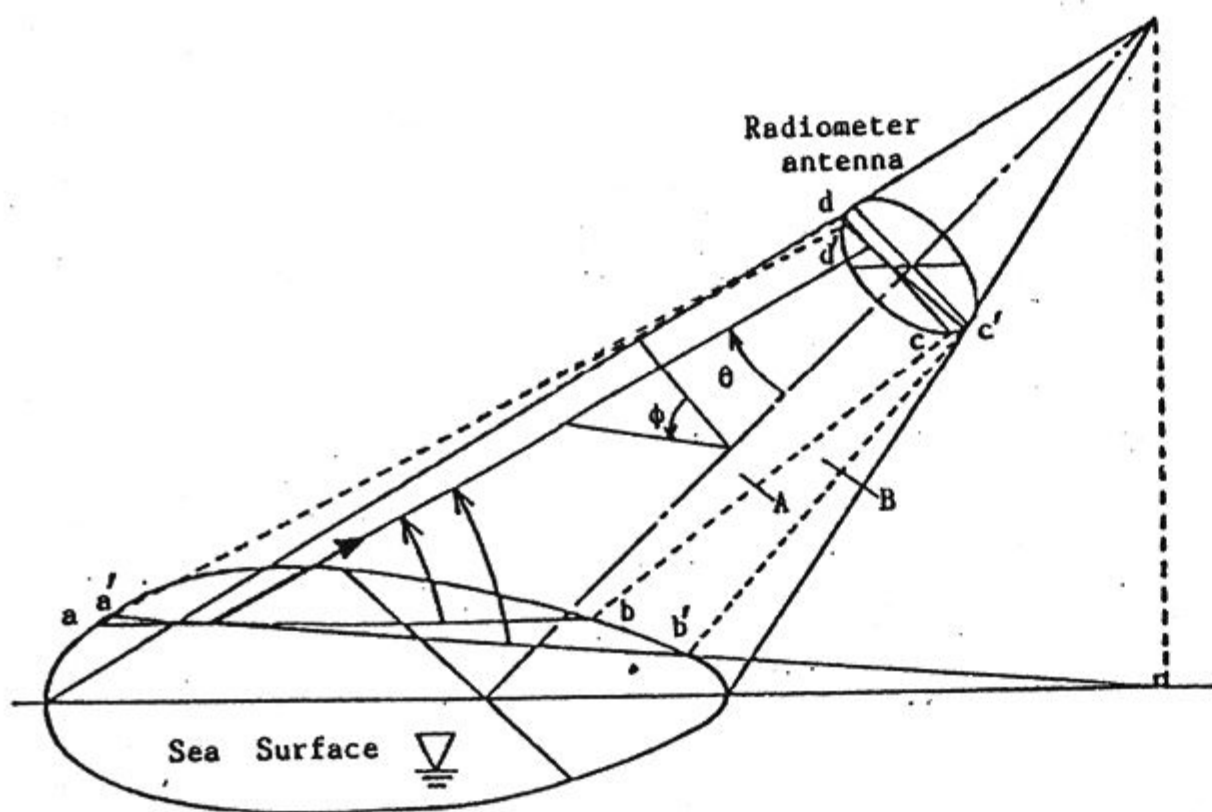


図 3 偏波の回転の幾何学(垂直偏波観測の場合)
面A(a b c d) : キャリブレーション時の垂直偏波面
面B(a' b' c' d') : 観測時の垂直偏波面
(両偏波とも局所放射は含んでいる)
Fig.3 Geometry of rotation of polarization
(for observation in vertical polarization)

通常、十分なる性能をもつマイクロ波放射計では、交叉偏波による影響はアンテナ温度にしてせいぜい1 K程度であることから、(1)式において、交叉偏波の効果を無視すると(3)式が得られ

$$T_{BP}(\theta_i) = \frac{\int_{\Omega} \left[T_{BV}^{cal} (g_{ps} \cdot \cos^2 \beta_p + g_{pt} \cdot \sin^2 \beta_p) + T_{BV}^{env} (g_{pt} \cdot \cos^2 \beta_p + g_{ps} \cdot \sin^2 \beta_p) \right] \cdot d\Omega}{\int_{\Omega} (g_{ps} + g_{pt}) \cdot d\Omega} \quad \dots\dots(3)$$

ただし、上の仮定から、 $P = V$ のときは $g_{ps} = 1$ 、 $g_{pt} = 0$ 、 $P = H$ のときは $g_{ps} = 0$ 、 $g_{pt} = 1$ である。
(3)式において、 g はスカラー量であるが、アンテナ・パターンはベクトル量で与えられるため、 $g = |\vec{E}|$ として用いる。また、(3)式において、積分が全立体角 4π にわたっているのは前述のように全方位から来る放射を受信するためである。ところで、アンテナが観測する輝度温度 $T_{BP}(\theta_i)$ から、アンテナの主軸方向 θ_i の方向から来る放射のみによるアンテナ温度を正しく回復することができれば理想的である。しかし、これは不可能に近い（これが可能な理想的アンテナをペンシル・ビーム・アンテナと呼ぶ）。そこで、通常はメイン・ローブが受信した放射によるアンテナ温度、すなわちメイン・ローブ平均アンテナ温度が回復される。これを垂直偏波の場合について示したものが(4)式である（水平偏波の場合も同様である）。

$$\bar{T}_{BV}(\theta_i) = \frac{1}{\int_{\Omega_M} g_{ps} \cdot d\Omega} \left[T_{BP}(\theta_i) - \int_{\Omega_{S_{sea}}} \{ T_{BV}^{sea}(\theta, \phi) \cdot g_{ps} \cdot \cos \beta_p + T_{BH}^{sea}(\theta, \phi) \cdot g_{ps} \cdot \sin \beta_p \} \cdot d\Omega - \int_{\Omega_{S_{sky}}} T_B^{sky} \cdot g_{ps} \cdot d\Omega \right] \quad \dots\dots(4)$$

ここで、

- $\bar{T}_{BP}$; アンテナのメイン・ローブ平均アンテナ温度 (K)
- T_{BP}^{sea} ; アンテナのサイド・ローブが見ている海面の輝度温度 (K)
- T_B^{sky} ; 天空の輝度温度 (K)
- Ω_M ; メイン・ローブの立体角
- $\Omega_{S_{sea}}, \Omega_{S_{sky}}$; それぞれ海面および天空を見ているサイド・ローブの立体角

$$\Omega_M + \Omega_{sca} + \Omega_{sky} = 4\pi$$

である。ただし、 $\int_{4\pi} g_{ps} \cdot d\Omega = 1$ となるように正規化してある。また、(4)式の右辺の分母となる項は、メイン・ローブの利得が1となるように正規化するために導入されたものである。なお、(4)式の右辺第3項では天空輝度温度に対して偏波の区別や、偏波面の回転の効果が考慮されていないが、これは大気放射が等方性をもつため偏波の別がないことによる。

本報告では、機体の姿勢、偏波面の回転効果、アンテナ・パターンを考慮する方法を開発するために、解析により得られた関係式を(3)式に適用し、アンテナ温度 $T_{BP}(\theta_i)$ の推定値を求め、これを実際に航空機により観測したアンテナ温度 $T_{BP}(\theta_i)$ と比較、検証する。ただし、推定値を求めるにあたってはアンテナの受信空間をビーム主軸から 10° まで（すなわち、ほぼメイン・ローブ全体）とし、アンテナ温度の推定値はこの空間にわたる平均値である。したがって、比較に用いた観測アンテナ温度を回復すべきであるが、ここでは、サイド・ローブ効果の補正は行わない（すなわち、観測したアンテナ温度をそのまま比較に用いる）。

図4は、航空機による観測の様子を示したもので、座標軸および角度は図4のようにとるものとする。また、局所放射角および偏波面の回転はベクトルを用いて計算する方が便利である。これらをまとめると以下のとおりである。

$x-y-z$ 座標軸；機体に固定された座標系

x 軸；機体前方

y 軸；機体側方

z 軸；機体下方

$X-Y-Z$ 座標軸； $x-y-z$ 座標系と原点を共有し、航空機が水平飛行中であると仮定したときの座標系で、 X 、 Y 、 Z のとり方は x 、 y 、 z 軸にそれぞれ同じ。

ξ 、 ζ ；それぞれバーティカル・ジャイロにより測定されたピッチング角およびローリング角で、ともに水平軸（それぞれ Y 軸および X 軸）まわりの角（ヨーイング角は測定されていないが、ヨーイングは問題とならない）。

η ； x 軸まわりのオイラー角（ $X-Y-Z$ 座標系を $x-y-z$ 座標系へ移す場合、ヨーイングを無視すると、まず Y 軸まわりの回転（ここでは ξ ）、次いでこの回転により得られる新しい x 軸のまわりに η の回転という順序で行われる。したがって、 ξ は Y 軸まわりのオイラー角でもある）。

θ 、 ϕ ；アンテナ視野内の任意の方向を示す角度パラメーターで、それぞれアンテナ主軸に直交する平面内での方位角。

δ 、 φ ； $X-Y-Z$ 座標系におけるアンテナ視野内の任意の任意の方向を示す角度パラメーターで、それぞれ Z 軸から測る角および $X-Y$ 平面内での方位角。

$\vec{P}$ ；アンテナ視野内の任意の方向（ θ 、 ϕ ）（ただし、 $x-y-z$ 座標系。 $X-Y-Z$ 座標系では（ δ 、 φ ））を示す単位方向ベクトル。

$\vec{F}$ ；点 P を通り観測主軸 AO に直交する平面と、点 P 方向のアンテナの垂直偏波面との交線方向を示す単位方向ベクトル。

$\vec{J}$ ；点 P を通り観測主軸 AO に直交する平面と、点 P 方向のアンテナの水平偏波面との交線方向を示す単位方向ベクトル。

$\vec{M}$ ；（ θ 、 ϕ ）方向のアンテナの垂直偏波面の単位法線ベクトル。

$\vec{V}$ ；（ θ 、 ϕ ）方向の海面の鉛直方向を示す単位方向ベクトル。

$\vec{N}$ ；点 S における海面の垂直偏波面 ARS の単位法線ベクトル。

$\vec{K}$ ；点 P におけるアンテナの水平偏波面の単位法線ベクトル。

$\vec{L}$ ；点 S における海面の水平偏波面の単位法線ベクトル。

；点 S における海面の両偏波放射の局所放射角。

である。その結果、任意の方向（ θ 、 ϕ ）における局所放射角 θ_e 、垂直および水平偏波の回転角 β_v および β_h はそれぞれ以下のようなになる。

$$\theta_{\epsilon} = \cos^{-1} \left[\frac{\vec{V} \cdot (-\vec{P})}{|\vec{V}| \cdot |-\vec{P}|} \right] = \cos^{-1} [\vec{V} \cdot (-\vec{P})]$$

$$(|\vec{V}| = |-\vec{P}| = 1)$$

$$\beta_v = \cos^{-1} \left[\frac{\vec{M} \cdot \vec{N}}{|\vec{M}| \cdot |\vec{N}|} \right] = \cos^{-1} [\vec{M} \cdot \vec{N}]$$

$$(|\vec{M}| = |\vec{N}| = 1)$$

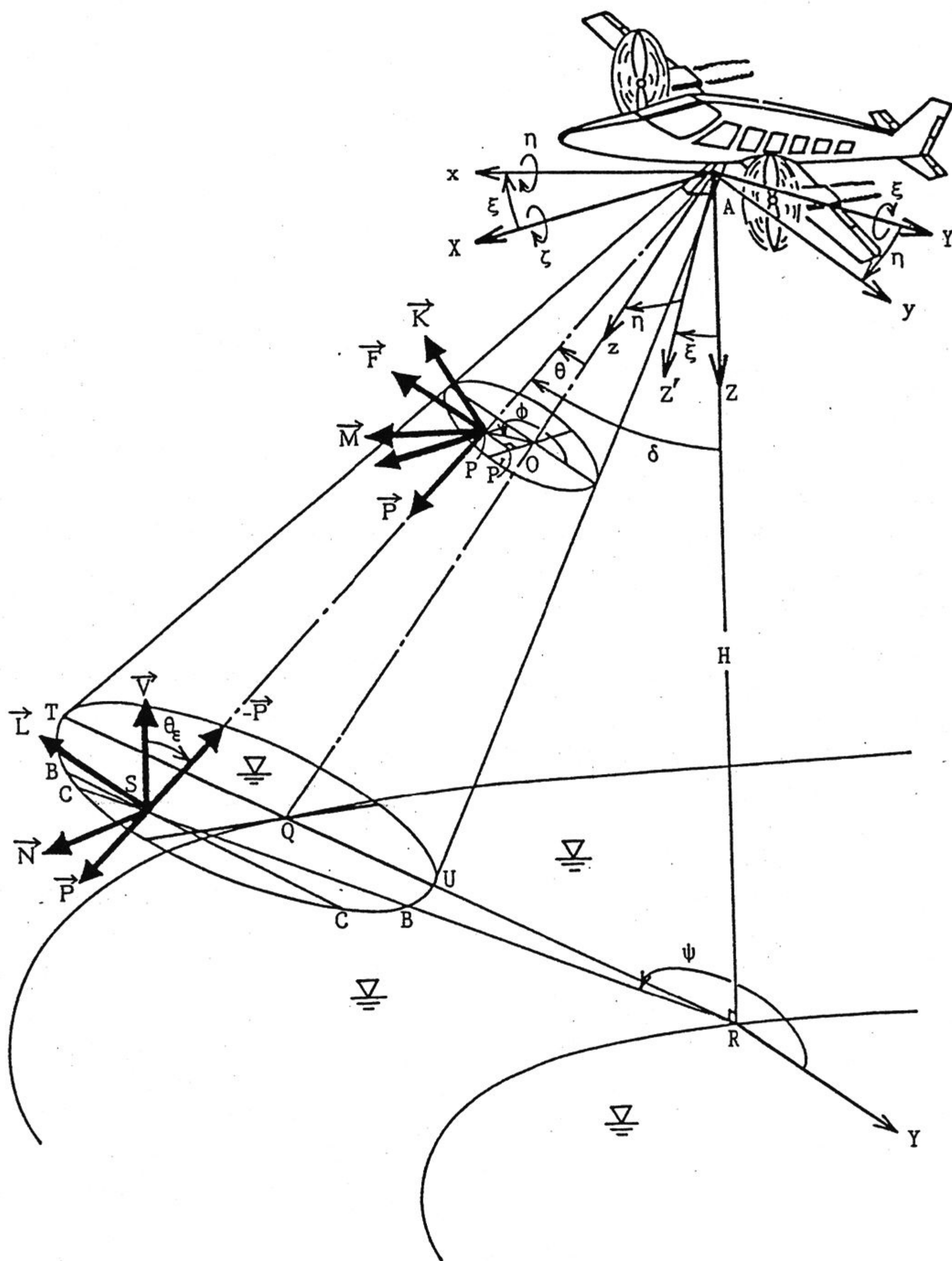


図 4 航空機によるマイクロ波放射観測の幾何学
Fig.4 Geometry of microwave radiometric
observation from aircraft

$$\vec{M} = \frac{\vec{F} \times \vec{P}}{|\vec{F} \times \vec{P}|}$$

$$\beta_H = \cos^{-1} \left[\frac{\vec{K} \cdot \vec{L}}{|\vec{K}| \cdot |\vec{L}|} \right] = \cos^{-1} [\vec{K} \cdot \vec{L}]$$

($|\vec{K}| = |\vec{L}| = 1$)

$$\vec{K} = \frac{\vec{P} \times \vec{J}}{|\vec{P} \times \vec{J}|}$$

$$\vec{L} = \frac{\vec{P} \times \vec{N}}{|\vec{P} \times \vec{N}|} = \vec{P} \times \vec{N} \quad (|\vec{P} \times \vec{N}| = 1)$$

また、以上の解析法をもとにアンテナ温度を推定する過程を示すと以下のとおりである。

- ① ジャイロデータからアンテナ（航空機）の姿勢に関するオイラー角を誘導する。

↓

- ② アンテナ視野内の任意の方位（ θ, ϕ ）における海面放射に対する局所放射角 θ_e を誘導する（局所放射角は両偏波とも等しい）。

↓

- ③ （ θ, ϕ ）方向における海面の両偏波輝度温度 $T_{BP}^{sea}(\theta, \phi)$ を求める（（ θ, ϕ ）方向が天空となることもある）。

↓

- ④ （ θ, ϕ ）方向における海面放射の両偏波

面とアンテナの両偏波面とのズレ（いわゆる偏波面の回転）の角度 β_P を求める（（ θ, ϕ ）方向が天空のときは考慮しなくてよい）。

↓

- ⑤ （ θ, ϕ ）方向のアンテナ感度 g を求める。

↓

- ⑥ 局所放射角 θ_e ，海面の両偏波輝度温度 $T_{BP}^{sea}(\theta, \phi)$ ，天空輝度温度 T_B^{sky} ，偏波面の回転角 β_P およびアンテナ感度 g を同時に考慮して③式によりアンテナ温度を求める。数値積分を実施する場合、積分区間は ϕ では $0^\circ \sim 360^\circ$ であるが、 θ は必要によりその都度適当に定めればよい。

3. 航空機観測

航空機による海面放射マイクロ波の観測実験は、1987年11月10～12日の3日間、図5に示す紀伊水道において実施した。写真1はこの観測実験に使用した航空機セスナ404型双発機である。観測に用いたマイクロ波放射計は6.7GHzと18.6GHzの2周波で、機体後方床部の中央に設けた1m×1mの孔からアンテナをとともに下方に向けた状態で固定した。10日は水直偏波による観測、11日は水平偏波による観測を行った。この観測はともに高度300mおよび2,000mで行った。アンテナが機体に固定されているため海面に対してアン

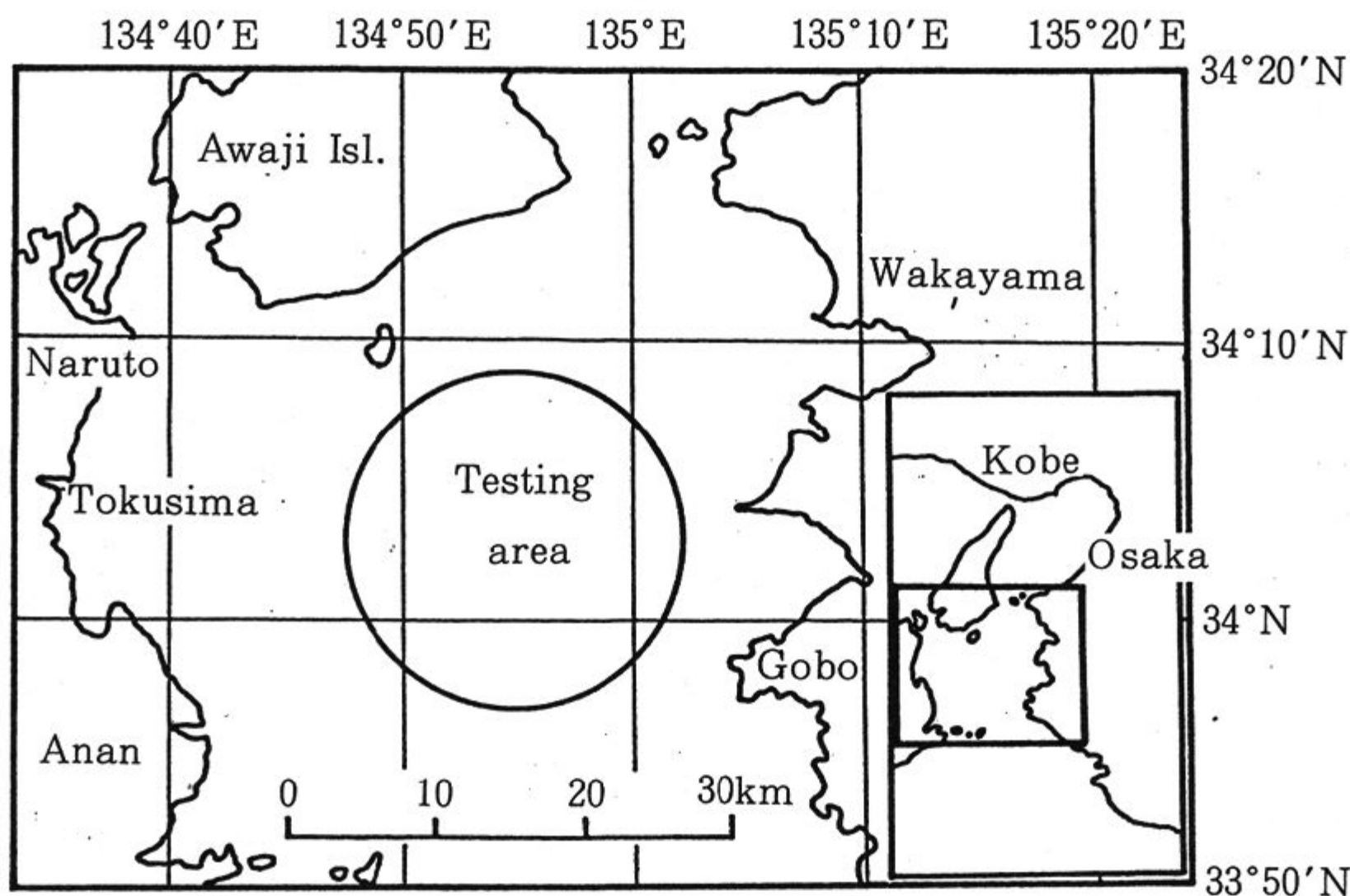


図 5 実験空域
Fig.5 Testing area



写真 1 実験に使用した航空機セスナ 404 型機
Photo 1 Cessna 404 aircraft employed for microwave radiometric observation

テナに観測角をもたせるためには機体自体を傾けなければならない（すなわち、一定のローリング角を持たせなければならない）。その結果、航空機は旋回飛行をすることになる。これをバンキング飛行をすることになる。これをバンキング飛行と呼び、このときの傾斜角をバンク角と呼ぶ。そして、垂直偏波、水平偏波のいずれの場合とも、2 高度においてバンク角 0° （結局、水平飛行である）、 10° 、 20° 、 30° 、 40° 、 50° および 60° のバンキング飛行による観測を行った。また、12 日は、大気効果をさらに厳密に調べるために、紀伊水道を南下しつつ高度を 500 m から 7000 m まで 500 m ごとにステップ的に変えながら各高度での水平飛行時の上向輝度温度（すなわち大気効果が含まれているため、見かけの海面輝度温度となる）と、赤外放射温度（同前）の観測を行った。航空機では、この他に、機体の姿勢、位置、気温なども同時に観測した。なお、X 軸および Y 軸まわりの角度（それぞれ η および ξ ）測定はバーティカル・ジャイロによった。

一方、実験空域下の海面には小型の観測船を配し、航空機による観測に合わせて、海面水温、風向、風速、波高（目視観測）、相対湿度、雲量等の観測を行い、海面や大気のマイクロ波放射を理論的に計算するために必要なデータを観測した。

4. 結果および検討

4.1 航空機のオイラー角（付記 1 参照）

バーティカル・ジャイロにより測定した X 軸お

よび ξ をオイラー角に変換すると以下のようなになる（図 4 参照）。

Y 軸まわり； ξ （そのままよい）

X 軸まわり； $\eta = \tan^{-1}[\tan\eta / \cos\xi]$

4.2 局所放射角；（付記 2 参照）

アンテナ視野内の任意方向（ θ ， ϕ ）の海面の両偏波の局所放射角 θ_ϵ は次式で与えられる。

$$\cos\theta_\epsilon = \left\{ \sin\xi \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi + \cos\xi \cdot (\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi) \right\} \cdot |\cos\theta|$$

4.3 偏波の回転角；（付記 3 参照）

アンテナ視野内の任意方向（ θ ， ϕ ）の海面の偏波放射に対する偏波面の回転角 θ_ϵ は偏波ごとにそれぞれ以下のように与えられる。

垂直偏波

$$\cos\beta_V = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta \cdot (P'_X{}^2 + P'_Y{}^2)}} \cdot \frac{\tan\theta \cdot \cos\theta}{|\tan\theta \cdot \cos\theta|} \cdot \frac{1}{|\tan\theta \cdot \cos\theta|} \cdot (P'_X C_Y - P'_Y C_X)$$

水平偏波

$$\cos\beta_H = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta \cdot (P'_X{}^2 + P'_Y{}^2)}} \cdot \frac{\tan\theta \cdot \sin\phi}{|\tan\theta \cdot \sin\phi|} \cdot \frac{|\cos\theta|}{\sqrt{P'_Y{}^2 + (\cos\xi \cdot P'_Z + \sin\xi \cdot P'_X)^2}} \cdot \cos\xi \cdot P'_Y$$

ただし、

$$C_X = \sin\xi \cdot \cos\eta \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi + \cos\theta$$

$$C_Y = -\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \sin\theta$$

$$C_Z = \cos\xi \cdot \cos\eta \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi - \sin\xi$$

$$P'_X = -\cos\xi \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi + \sin\xi \cdot$$

$$\cdot (\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi + \cos\eta)$$

$$P'_Y = \cos\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi - \sin\eta$$

$$P'_Z = \sin\xi \cdot \tan\theta \cdot \sin\theta + \cos\xi \cdot$$

$$\cdot (\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi + \cos\eta)$$

4.4 計算結果と観測結果の比較

図 6 は、本報告で述べた計算法にもとづいた計算したアンテナ温度を航空機により観測したアンテナ温度と比較したものである。ここでは、一例

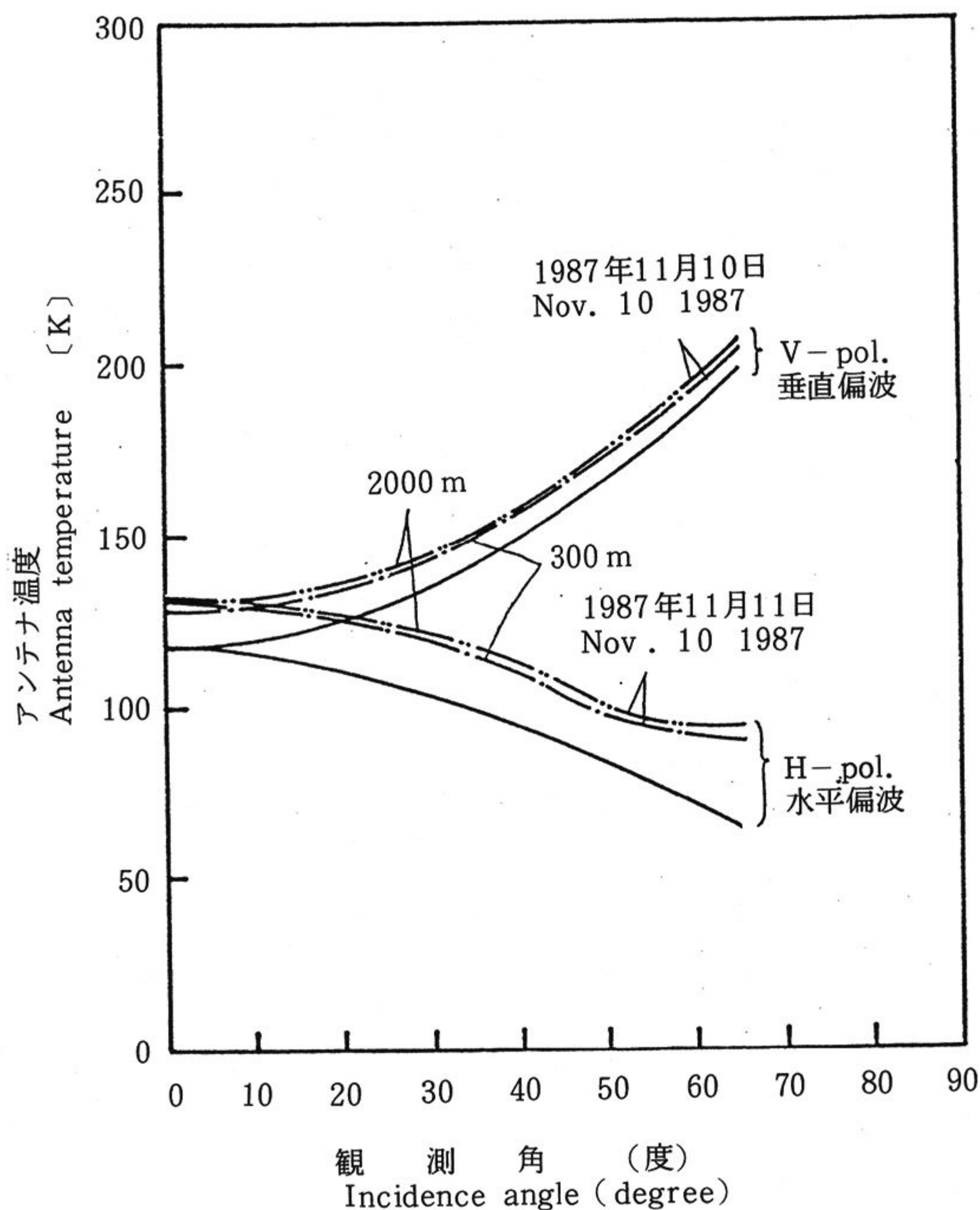


図 6 18.6 GHzにおけるアンテナ温度の理論
推定値と航空機観測値との比較

——— ; 理論的に推定されるアンテナ温度
—— — — , — — — — ; それぞれ300m及び2000mの高
度で観測したアンテナ温度

Fig.6 Comparison of theoretically predicted
and aircraft-observed antenna tem-
peratures at 18.6 GHz

——— ; theoretically predicted
antenna temperature
—— — — , — — — — ; observed antenna temper-
ature at the heights of
300 and 2000 m above the
sea level, respectively

として 18.6 GHz における比較を示す。ただし、2.理論および解析方法において述べたように、アンテナの受信空間は計算と観測とでは異なる（用いたマイクロ波放射計のビーム幅は電場面内、磁場面内ともに $9 \sim 10^\circ$ であり、メイン・ローブ全体の利得は約 0.81 である。そして、計算結果はメイン・ローブ全体にわたるものである）。

図 6 から明らかなように、計算、観測のいずれとも、アンテナ温度パターンは同じ傾向を示す。また、両偏波とも観測値が計算値よりも全観測角にわたって高い値を示しているが、これは観測値には天空放射の海面反射分や大気放射の効果が加わっているためと考えられる。観測値と計算値との差は垂直偏波よりも水平偏波の方が大きいが、大気は等方性放射を行うため大気放射による効果が両偏波間で等しいことを考えれば、この差の違いは結局海面での天空放射の反射・散乱過程の偏波特性に基づくものであるといえる。また、高度 300 m と 2000 m とでは、観測値に特に大きな差はない。これは、通常、大気放射の中で最も大きな寄与をする水蒸気の大部分が海面近傍の 100 m 程度の接地境界層に存在し、300 ~ 9000 m の間では比較的少ないことによるものである。さらに、観測値については、計算の場合と同じ受信空間にわたる平均アンテナ温度が回復されている訳ではないので、このまま計算結果と比較することは危険であるが、あえて比較を行うとすれば、図 6 から推定される海面反射分には、垂直偏波では特に顕著な観測角依存性が認められないのに対して、水平偏波では観測角が 60° になると大きな反射分が予想され、観測角依存性が認められる。そして、これはすでに Sasaki らが報告³⁾している事実と一致する。

5. おわりに

本報告では、まず交叉偏波の効果を無視した場

合のアンテナ温度の評価法を誘導した。しかし、交叉偏波の効果を考慮する方法も全く同様であるため、特に困難はない。観測データを解析するうえでむしろ問題となるのは、サイド・ローブ効果を補正するためにメイン・ローブ外の周囲環境輝度温度をどのように与えるか、大気効果の補正をどう行うか、さらには天空放射の海面反射分を簡便に推定するにはどうするか等々である。今後はこれらについて検討する予定である。

参考文献

- 1) J. P. Claassen and A. K. Fung, The recovery of polarized apparent measurements, IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-22, No. 3, pp. 433 - 442.
- 2) Y. Sasaki, I. Asanuma, G. Naito, and T. Suzuki, : The dependence of sea-surface microwave emission on wind speed, frequency, incidence angle, and polarization over the frequency range from 1 to 40 GHz, IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, Vol. GE-25, No. 2, pp. 138 - 146.
- 3) Y. Sasaki, I. Asanuma, K. Muneyama, G. Naito, and T. Suzuki, Microwave emission and reflection from the wind-roughened sea surface at 6.7 and 18.6 GHz, IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing (in press).
- 4) 佐々木保徳, : 天空輝度温度の海面反射分評価のための単純幾何光学モデル、—非干渉性散乱モデルおよびおよび Fresnel 反射モデルとの比較—, 日本リモートセンシング学会誌, 7, No. 4, pp. 47 - 599. (1988)

(原稿受理: 1988年5月10日)

(付記 1) 航空機のオイラー角の求め方
 水平軸 X 軸まわりの角 (ローリング角) ζ を機
 体軸 X 軸まわりの角 η に変換するだけで、Y 軸ま
 わりの角 (ピッチング角) ξ はそのままよい。
 図 4 において、 $x-y-z$ 座標系で y 軸上に単位
 ベクトル $I(0, 1, 0)$ をとる。そして、まずロー
 リング角 η だけ x 軸のまわりに回転して戻すと、
 I は新しい $x-Y-Z'$ 座標系では次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\eta) & \sin(-\eta) \\ 0 & -\sin(-\eta) & \cos(-\eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\eta \\ \sin\eta \end{pmatrix}$$

次にピッチング角 ξ だけ Y 軸のまわりに回転して
 戻すと、 I は新しい $X-Y-Z$ 座標系では次のよ
 うになる。

$$\begin{pmatrix} \cos(-\xi) & 0 & \sin(-\xi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\xi) & 0 & \cos(-\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\eta \\ \sin\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\xi \cdot \sin\eta \\ \cos\eta \\ \cos\xi \cdot \sin\eta \end{pmatrix}$$

さらに、X 軸のまわりに ζ だけ回転すると、これ
 により得られる新しい座標系での I は次のよう
 になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\zeta & \sin\zeta \\ 0 & -\sin\zeta & \cos\zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\xi \cdot \sin\eta \\ \cos\eta \\ \cos\xi \cdot \sin\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\xi \cdot \sin\eta \\ \cos\zeta \cdot \cos\eta + \sin\zeta \cdot \cos\xi \cdot \sin\eta \\ -\sin\zeta \cdot \cos\eta + \cos\zeta \cdot \cos\xi \cdot \sin\eta \end{pmatrix}$$

そして、この Z 方向成分を 0 とおく (つまり、 ζ
 は水平方向からの回転角であるから) と、

$$\begin{aligned} -\sin\zeta \cdot \cos\eta + \cos\zeta \cdot \cos\xi \cdot \sin\eta &= 0 \\ \tan\eta &= \tan\zeta / \cos\xi \\ \eta &= \tan^{-1} [\tan\zeta / \cos\xi] \end{aligned} \dots\dots\dots(1)$$

(付記 2) アンテナ視野内の任意方向 (θ, ϕ) に
 おける海面の局所放射角の求め方

図 4 において、単位ベクトル $\vec{V}$ と $-\vec{P}$ から、局
 所方射角 θ_e は

$$\begin{aligned} \cos\theta_e &= \frac{\vec{V} \cdot (-\vec{P})}{|\vec{V}| \cdot |-\vec{P}|} \\ &= \vec{V} \cdot (-\vec{P}) \quad (|\vec{V}| = |-\vec{P}| = 1) \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

として求まる。そこで、 $X-Y-Z$ 座標系におけ
 る $\vec{V}$ および $-\vec{P}$ を以下のようにして求める。

まず $x-y-z$ 座標系における $\vec{P}$ を求める。
 $\overline{OA}=1$ とおくと
 $\overline{OP}=\tan\theta$
 したがって

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= (-\tan\theta \cdot \sin\phi, \tan\theta \cdot \cos\phi, 1) \\ |\vec{AP}| &= \sqrt{\tan^2\theta \cdot \sin^2\phi + \tan^2\theta \cdot \cos^2\phi + 1} \\ &= \sqrt{\tan^2\theta + 1} \\ &= |\sec\theta| \\ \therefore \vec{P} &= \frac{\vec{AP}}{|\vec{AP}|} \\ &= |\cos\theta| \cdot (\tan\theta \cdot \sin\phi, \tan\theta \cdot \cos\phi, 1) \end{aligned}$$

次に $\vec{P}$ を $X-Y-Z$ 座標系に移すため、ローリン
 グ角 η 、ピッチング角 ξ の順に座標系の回転を行
 う。これにより $\vec{P}$ は $X-Y-Z$ 座標系では

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \cos(-\xi) & 0 & -\sin(-\xi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\xi) & 0 & \cos(-\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cos(-\eta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(-\eta) \\ 0 & -\sin(-\eta) & \cos(-\eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\tan\theta \cdot \sin\phi \cdot |\cos\theta| \\ \tan\theta \cdot \cos\phi \cdot |\cos\theta| \\ |\cos\theta| \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(-\xi) & 0 & +\sin(-\xi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\xi) & 0 & \cos(-\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\tan\theta \cdot \sin\phi \cdot |\cos\theta| \\ \cos\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi \cdot |\cos\theta| - \sin\eta \cdot |\cos\theta| \\ \sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi \cdot |\cos\theta| + \cos\eta \cdot |\cos\theta| \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \{-\cos\xi \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi + \sin\xi \cdot (\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi + \cos\eta)\} \cdot |\cos\theta| \\ \cos\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi - \sin\eta \cdot |\cos\theta| \\ \{\sin\xi \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi + \cos\xi \cdot (\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi + \cos\eta)\} \cdot |\cos\theta| \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3)
\end{aligned}$$

となる。これを

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

とおく。

次に X-Y-Z 座標系における

$$X-Y-Z \quad \vec{V}(V_x, V_y, V_z) \quad (0, 0, -1)$$

となる。

以上から,

$$\begin{aligned}
\cos\theta_\epsilon &= \vec{V} \cdot (-\vec{P}) \\
&= -(V_x \cdot P_x + V_y \cdot P_y + V_z \cdot P_z) \\
&= -V_z \cdot P_z \\
&= P_z \\
&= \{\sin\xi \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi + \cos\xi \cdot (\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi + \cos\eta)\} \cdot |\cos\theta| \\
&\dots\dots\dots(4)
\end{aligned}$$

から θ_ϵ を求めることができる。

(付記3) アンテナ視野内の任意方向 (θ, ϕ)
における海面放射の偏波面の回転角の
求め方

(1) 垂直偏波の場合

図4の単位ベクトル $\vec{M}, \vec{N}$ から, 垂直偏波面の
回転角 β_v は

$$\begin{aligned}
\cos\beta_v &= \frac{\vec{M} \cdot \vec{N}}{|\vec{M}| \cdot |\vec{N}|} \\
&= \vec{M} \cdot \vec{N} \quad (|\vec{M}| = |\vec{N}| = 1) \quad \dots\dots\dots(5)
\end{aligned}$$

として求まる。そこで X-Y-Z 座標系における
 $\vec{M}$ および $\vec{N}$ を以下のようにして求める。

(I) $\vec{M}$

$$\vec{M} = \frac{\vec{F} \times \vec{P}}{|\vec{F} \times \vec{P}|}$$

であるから, $\vec{F}$ と $\vec{P}$ を求めなければならない。

まず, $x - y - z$ 座標系における $\vec{F}$ を求める。
 $x - y - z$ 座標系において,

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= (-\tan\theta \cdot \sin\phi, \tan\theta \cdot \cos\phi, 1) \\ \vec{AP'} &= (-\tan\theta \cdot \sin\phi, 0, 1) \\ \therefore \vec{P'P} &= \vec{AP} - \vec{AP'} \\ &= (0, \tan\theta \cdot \cos\phi, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{P'P}| &= \sqrt{(\tan\theta \cdot \cos\phi)^2} \\ &= |\tan\theta \cdot \cos\phi| \\ \therefore \vec{F} &= \frac{\vec{P'P}}{|\vec{P'P}|} \\ &= (0, \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|}, 0)\end{aligned}$$

次に座標変換により $x - y - z$ 座標系から $X - Y - Z$ 座標系へ移すと次のようになる。

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \cos(-\xi) & 0 & -\sin(-\xi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\xi) & 0 & \cos(-\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\eta) & \sin(-\eta) \\ 0 & -\sin(-\eta) & \cos(-\eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\xi) & 0 & -\sin(-\xi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\xi) & 0 & \cos(-\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\eta \cdot \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \\ \sin\eta \cdot \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin\xi \cdot \sin\eta \cdot \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \\ \cos\eta \cdot \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \\ \cos\xi \cdot \sin\eta \cdot \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(6)\end{aligned}$$

これを (F_X, F_Y, F_Z) とおく。また, $\vec{P}(P_X, P_Y, P_Z)$ は(3)式で与えられる。

したがって

$$\begin{aligned}\vec{F} \times \vec{P} &= (F_Y \cdot P_Z - F_Z \cdot P_Y, F_Z \cdot P_X - F_X \cdot P_Z, \\ &\quad F_X \cdot P_Y - F_Y \cdot P_X)\end{aligned}$$

を成分ごとに求めるとそれぞれ以下のようにになる。

$$\begin{aligned}F_Y \cdot P_Z - F_Z \cdot P_Y &= \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \cdot |\cos\theta| \cdot (\sin\xi \cdot \cos\eta \cdot \tan\theta \\ &\quad \cdot \sin\phi + \cos\xi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_Z \cdot P_X - F_X \cdot P_Z &= \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \cdot |\cos\theta| \cdot (-\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi) \\ F_X \cdot P_Y - F_Y \cdot P_X &= \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \cdot |\cos\theta| \cdot (\cos\xi \cdot \cos\eta \cdot \tan\theta \\ &\quad \cdot \sin\phi - \sin\xi)\end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \sin\xi \cdot \cos\eta \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi + \cos\xi \\ C_y &= -\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi \\ C_z &= \cos\xi \cdot \cos\eta \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi - \sin\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots(7)$$

とおくと,

$$\left. \begin{aligned} F_y \cdot P_z - F_z \cdot P_y &= \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \cdot |\cos\theta| \cdot C_x \\ F_z \cdot P_x - F_x \cdot P_z &= \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \cdot |\cos\theta| \cdot C_y \\ F_x \cdot P_y - F_y \cdot P_x &= \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \cdot |\cos\theta| \cdot C_z \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

である。また,

$$\begin{aligned} |\vec{F} \times \vec{P}| &= |\sin\theta \cdot \sin\phi| \\ \therefore \vec{M} &= \frac{\vec{F} \times \vec{P}}{|\vec{F} \times \vec{P}|} \\ &= \frac{1}{|\tan\theta \cdot \sin\phi|} \cdot \frac{\tan\theta \cdot \cos\phi}{|\tan\theta \cdot \cos\phi|} \\ &\quad \cdot (C_x, C_y, C_z) \dots\dots(9) \end{aligned}$$

そこで $\vec{M}$ の成分を (M_x, M_y, M_z) とおく。

(II) $\vec{N}$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= (-\sin(\psi + \frac{\pi}{2}), \cos(\psi + \frac{\pi}{2}), 0) \\ &= (-\cos\psi, -\sin\psi, 0) \end{aligned}$$

これを (N_x, N_y, N_z) とおく。そして、これら成分を θ, ϕ, ξ, η で表わす。

θ, ϕ, ξ, η と δ, ψ の関係は以下のとおりである。すなわちX-Y-Z座標系における点Pの座標は次式で与えられる(APで考えるため, (3)式において $|\cos\theta| = 1$ とおく)

$$\left(\begin{aligned} -\cos\xi \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi + \sin\xi \cdot (\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi + \cos\eta) \\ \cos\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi - \sin\eta \\ \sin\xi \cdot \tan\theta \cdot \sin\phi + \cos\xi \cdot (\sin\eta \cdot \tan\theta \cdot \cos\phi + \cos\eta) \end{aligned} \right) \dots\dots(10)$$

これを

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix}$$

とおく。ただし,

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} \cdot |\cos\theta|$$

である。

一方、点Pの座標を δ と ψ を用いて表わすと次式のようにになる。

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\cos\theta} \cdot \sin\delta \cdot \sin\psi \\ \frac{1}{\cos\theta} \cdot \sin\delta \cdot \cos\psi \\ \frac{1}{\cos\theta} \cdot \cos\delta \end{pmatrix} \dots\dots(11)$$

(10), (11)式から

$$\cos\delta = \cos\theta \cdot P'_z$$

および

$$\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \sin^2\delta \cdot (\sin^2\psi + \cos^2\psi) = P'^2_x + P'^2_y$$

すなわち

$$\sin^2\delta = \cos^2\theta \cdot (P'^2_x + P'^2_y)$$

が得られる。 $0 \leq \delta \leq \pi$ で $0 \leq \sin\delta \leq 1$ であるから

$$\sin\delta = \sqrt{\cos^2\theta \cdot (P'^2_x + P'^2_y)}$$

である。また,

$$\begin{aligned} \sin\psi &= -\frac{\cos\theta}{\sin\delta} \cdot P'_x \\ &= -\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta \cdot (P'^2_x + P'^2_y)}} \cdot P'_x \end{aligned}$$

である、これからさらに,

$$\cos \psi = \frac{\cos \theta}{\sin \delta} \cdot P'_Y$$

$$= \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta \cdot (P_X'^2 + P_Y'^2)}} \cdot P'_Y$$

これらを求めると,

$$\begin{cases} \cos \psi = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta \cdot (P_X'^2 + P_Y'^2)}} \cdot P'_Y = -N_X \\ \sin \psi = -\frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta \cdot (P_X'^2 + P_Y'^2)}} \cdot P'_X = -N_Y \end{cases} \dots\dots\dots(12)$$

$$\begin{cases} \cos \delta = \cos \theta \cdot P'_Z \\ \sin \delta = \sqrt{\cos^2 \theta \cdot (P_X'^2 + P_Y'^2)} \end{cases} \dots\dots\dots(13)$$

となる。

以上から、垂直偏波面の回転角を β_V とすると、

$$\begin{aligned} \cos \beta_V &= \frac{\vec{M} \cdot \vec{N}}{|\vec{M}| \cdot |\vec{N}|} \\ &= \vec{M} \cdot \vec{N} \\ &= M_X \cdot N_X + M_Y \cdot N_Y + M_Z \cdot N_Z \\ &= M_X \cdot N_X + M_Y \cdot N_Y \quad (N_Z = 0) \\ &= \frac{1}{|\tan \theta \cdot \sin \phi|} \cdot \frac{\tan \theta \cdot \cos \phi}{|\tan \theta \cdot \cos \phi|} \\ &\quad \cdot \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta \cdot (P_X'^2 + P_Y'^2)}} \cdot (C_Y P'_X - C_X P'_Y) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} C_X &= \sin \xi \cdot \cos \eta \cdot \tan \theta \cdot \sin \phi + \cos \xi \\ C_Y &= -\sin \eta \cdot \tan \theta \cdot \sin \phi \\ C_Z &= \cos \xi \cdot \cos \eta \cdot \tan \theta \cdot \sin \phi - \sin \xi \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

$$\left. \begin{aligned} P'_X &= -\cos \xi \cdot \tan \theta \cdot \sin \phi + \sin \xi \\ &\quad \cdot (\sin \eta \cdot \tan \theta \cdot \cos \phi + \cos \eta) \\ P'_Y &= \cos \eta \cdot \tan \theta \cdot \cos \phi - \sin \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

である。

(2) 水平偏波の場合

図4の単位ベクトル $\vec{K}$, $\vec{L}$ から、水平偏波面の回転角 β_H は

$$\begin{aligned} \cos \beta_H &= \frac{\vec{K} \cdot \vec{L}}{|\vec{K}| \cdot |\vec{L}|} \\ &= \vec{K} \cdot \vec{L} \quad (|\vec{K}| = |\vec{L}| = 1) \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

として求まる。そこで、X-Y-Z座標系での $\vec{K}$ および $\vec{L}$ を以下のようにして求める。 $\vec{K}$ および $\vec{L}$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \frac{\vec{P} \times \vec{J}}{|\vec{P} \times \vec{J}|} \\ \vec{L} &= \frac{\vec{P} \times \vec{N}}{|\vec{P} \times \vec{N}|} \end{aligned}$$

$$= \vec{P} \times \vec{N} \quad (|\vec{P} \times \vec{N}| = 1)$$

として与えられるため、 $\vec{P}$, $\vec{J}$, $\vec{N}$ をまず求めなければならない。

(I) $\vec{K}$

X-Y-Z座標系において、 $\vec{P}(P_X, P_Y, P_Z)$ は(3)式で与えられる。一方、 $\vec{J}$ は次のようにして求められる。

x-y-z座標系において

$$\vec{AP} = (-\tan \theta \cdot \sin \phi, \tan \theta \cdot \cos \phi, 1)$$

$$\vec{AJ} = (0, \tan \theta \cdot \cos \phi, 1)$$

$$\therefore \vec{JP} = \vec{AP} - \vec{AJ}$$

$$= (-\tan \theta \cdot \sin \phi, 0, 0)$$

$$|\vec{JP}| = \sqrt{(-\tan \theta \cdot \sin \phi)^2}$$

$$= |\tan \theta \cdot \sin \phi|$$

$$\therefore \vec{J} = \frac{\vec{JP}}{|\vec{JP}|}$$

$$= \left(-\frac{\tan \theta \cdot \sin \phi}{|\tan \theta \cdot \sin \phi|}, 0, 0 \right)$$

これをX-Y-Z座標系へ移すと、

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \cos(-\xi) & 0 & -\sin(-\xi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-\xi) & 0 & \cos(-\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\eta) & \sin(-\eta) \\ 1 & -\sin(-\eta) & \cos(-\eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\tan\theta \cdot \sin\phi}{|\tan\theta \cdot \sin\phi|} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos\xi \cdot \frac{\tan\theta \cdot \sin\phi}{|\tan\theta \cdot \sin\phi|} \\ 0 \\ \sin\xi \cdot \frac{\tan\theta \cdot \sin\phi}{|\tan\theta \cdot \sin\phi|} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\tan\theta \cdot \sin\phi}{|\tan\theta \cdot \sin\phi|} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\xi \\ 0 \\ \sin\xi \end{pmatrix} \dots\dots\dots(17)
\end{aligned}$$

となり、これを

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$$

とおく、これにより

$$\begin{aligned}
\vec{P} \times \vec{J} &= (P_y J_z - P_z J_y, P_z J_x - P_x J_z, P_x J_y - P_y J_x) \\
&= (P_y J_z, P_z J_x - P_x J_z, -P_y J_z) \quad (J_y = 0) \\
&= \frac{\tan\theta \cdot \sin\phi}{|\tan\theta \cdot \sin\phi|} \cdot |\cos\theta| \cdot (\sin\xi \cdot P'_y, \\
&\quad -\cos\xi \cdot P'_z - \sin\xi \cdot P'_x, \cos\xi \cdot P'_y)
\end{aligned}$$

$$|\vec{P} \times \vec{J}| = |\cos\theta| \cdot \sqrt{P_y'^2 + (\cos\xi \cdot P'_z + \sin\xi \cdot P'_x)^2}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}
\vec{K} &= \frac{\vec{P} \times \vec{J}}{|\vec{P} \times \vec{J}|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{P_y'^2 + (\cos\xi \cdot P'_z + \sin\xi \cdot P'_x)^2}} \\
&\quad \cdot \frac{\tan\theta \cdot \sin\phi}{|\tan\theta \cdot \sin\phi|} \cdot (\sin\xi \cdot P'_y, -\cos\xi \\
&\quad \cdot P'_z - \sin\xi \cdot P'_x, \cos\xi \cdot P'_y) \dots\dots\dots(18)
\end{aligned}$$

これを (K_x, K_y, K_z) とする。

(II) $\vec{L}$

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{P} \times \vec{N} \\
&= (P_y N_z - P_z N_y, P_z N_x - P_x N_z, P_x N_y - P_y N_x) \\
&= (-P_z N_y, P_z N_x, P_x N_y - P_y N_x) \\
&= \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta \cdot (P_x'^2 + P_y'^2)}} \cdot |\cos\theta| \\
&\quad \cdot (-P'_z P'_x, -P'_y P'_z, P_x'^2 + P_y'^2) \\
&= \frac{\cos\theta}{\sqrt{P_x'^2 + P_y'^2}} \cdot (-P'_z P'_x, -P'_y P'_z, P_x'^2 + P_y'^2) \dots\dots\dots(19)
\end{aligned}$$

これを (L_x, L_y, L_z) とする。

(18), (19)式から

$$\begin{aligned}
\cos\beta_H &= \vec{K} \cdot \vec{L} \\
&= K_x \cdot L_x + K_y \cdot L_y + K_z \cdot L_z \\
&= \frac{1}{\sqrt{P_y'^2 + (\cos\xi \cdot P'_z + \sin\xi \cdot P'_x)^2}} \\
&\quad \cdot \frac{\tan\theta \cdot \sin\phi}{|\tan\theta \cdot \sin\phi|} \cdot \frac{\cos\theta}{\sqrt{P_x'^2 + P_y'^2}} \\
&\quad \cdot \cos\xi \cdot P'_y \cdot (P_x'^2 + P_y'^2 + P_z'^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{P_y'^2 + (\cos\xi \cdot P'_z + \sin\xi \cdot P'_x)^2}} \\
&\quad \cdot \frac{\sin\theta \cdot \sin\phi}{|\sin\theta \cdot \sin\phi|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta \cdot (P_x'^2 + P_y'^2)}}
\end{aligned}$$

$$\cdot \cos \xi \cdot P'_Y$$

$$(P'^2_X + P'^2_Y + P'^2_Z = \frac{1}{\cos^2 \theta}) \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし,

$$\left. \begin{matrix} P'_X \\ P'_Y \end{matrix} \right\} \text{(15)式に同じ}$$

$$P'_Z = \sin \xi \cdot \tan \theta \cdot \sin \phi + \cos \xi \\ \cdot (\sin \eta \cdot \tan \theta \cdot \cos \phi + \cos \eta)$$

である。