

北太平洋に対する風成海洋大循環モデルについて (第3報)

黒山 順二^{*1}

本報告では、「北太平洋に対する風成海洋大循環モデル」についての第3報として、実測された風の海面応力及び実測された海底地形を用いて、北太平洋における海流等の数値シミュレーションを行っている。

球面座標を用い、海面での“rigid-lid”の仮定及び海底での“滑りなし”条件の下で、海底地形を考慮した場合の体積輸送量に関する渦度方程式を導出している。その後、それに対する差分方程式をSOR法によって解いている。エクспリシット・スキームとEuler-松野・スキームを組み合わせて用い、2度メッシュで時間刻み幅を6000秒として、4000ステップまで時間積分している。

本研究において、北太平洋の表層海洋大循環を構成する主な3つの循環系が再現された。さらに、海底地形の風成大循環への影響は、高緯度及び浅い海において顕著に現れるという傾向が、明らかとなった。今後は、1層モデルから多層モデルへの拡張が要求される。

キーワード：風成海洋大循環モデル、数値シミュレーション、風の海面応力、
海底地形

On the Wind-driven Oceanic General Circulation Model for the North Pacific Ocean(Part 3)

Junji KUROYAMA^{*2}

In this paper, part 3 of “The Wind-driven General Circulation Model for the North Pacific Ocean”, the actual wind stress on the sea surface and the actual bottom topography are used in simulating the ocean currents in the North Pacific Ocean.

Spherical coordinates are used. The “rigid-lid assumption” is used for the sea surface and the “non-slip condition” for the sea bottom. The vorticity equation for the volume transport is derived for the case with bottom topography. Then the corresponding difference equation is solved by the SOR method. The explicit scheme is used in combination with Euler-Matsuno scheme, and the integration is executed up to 4000 time steps, with 2 degrees square meshes and each time step of 6000 seconds.

In the present study, the oceanic circulation of the surface layer in North Pacific Ocean, which mainly consists of three gyres, was reproduced. It became clear that the bottom topography has great influence on the wind-driven circulation at high

* 1 海洋開発研究部

* 2 Marine Research and Development Department

latitude and in areas with shallow ocean depth. An extension from this "single-layer model" to a "multilayer model" is now needed.

Key words: Wind-driven oceanic general circulation model, Numerical simulation, Wind stress on the sea surface, Bottom topography

1 はじめに

本研究は、海洋の大規模現象である“海洋大循環”を対象とし、その数値シミュレーションの技術開発を目的として行われている。ところが、この海洋大循環は、エルニーニョ現象やラニーニャ現象に見られるように、地球規模の大気大循環とも密接に関連していることが明らかになっている。したがって、海洋大循環の数値シミュレーションは、近年関心を集めている地球温暖化や、異常気象等の地球環境問題の解明のためにも大きく貢献すると期待され、技術的な面のみにとどまらず重要な課題であると思われる。

海洋現象の研究において、理論・シミュレーション・観測のいずれにしろ、どの程度の時間・空間スケールに注目するかを認識することが重要である。本研究で第1目標としているのは、海洋大循環の中でも特に循環系 (gyre) であり、数年の時間スケール及び数千kmの空間スケールの海洋現象である。これまで、風の応力が海面に作用することによってのみ生じると考える海洋大循環、いわゆる“風成大循環”の数値シミュレーションを、北太平洋について行ってきた。まず、第1報¹⁾においては海面・海底・海岸における境界条件を出来る限り単純化し、数値モデルの骨組みを作った。次に、第2報²⁾では、海岸地形のみを実際に近いものとし、数値シミュレーションにおける海岸地形の取り扱い方を考察すると共に、海岸地形の風成大循環に対する影響を調べた。そこで、今回はその続きとして、まず風の海面応力として実測値を用いた後、さらに発展させて海底地形にも実測値を用いて、海底地形の取り扱い方を考察すると共に、海底地形の風成大循環に対する影響を調べてみた。第2節では海底地形を考察した場合の体積輸送量に関する線形渦度方程式の導出について述べ、第3節ではその渦度方程式における海底地

形の影響の取り扱い方について詳述する。最後に、第4節で数値シミュレーションの結果を記述すると共にその考察を行っている。

本報告では、これまでと同様に、海面における“rigid-lid(固い蓋)の仮定”及び海底における“滑りなし条件”が用いられた。さらに、海岸線における“滑りなし条件”及び赤道における“南北対称条件”が用いられた。また、差分法の適用に際しては、第2報と同じく、非線形項も含めた中規模渦解像モデルへの応用も考慮して、完全インプリシット・スキームとEuler-松野・スキームを5回に1度の割合で組み合わせて使用した。ただし、時間刻み幅を6000秒として4000ステップまで、差分化された渦度方程式をSOR法を用いて時間積分した。これは、現象の時間で約9.3ヵ月に相当し、本報告における数値シミュレーションでは、いずれの場合もその時に定常状態になっていることを確認している。なお、水平渦動粘性係数は $A = 3.0 \times 10^8 \text{ cm}^2/\text{s}$ と、鉛直渦動粘性係数は $\kappa = 1.0 \text{ cm}^2/\text{s}$ とし、海水の海面密度 $[\rho]_{z=0} = 1.03 \text{ g/cm}^3$ とした。

2 海底地形を考慮した場合の体積輸送量に関する渦度方程式の導出

第1報¹⁾、第2報²⁾と同様に、地球のジオイドを半径 $R = 6371 \text{ km}$ の球で近似し、地球の自転に合わせて回転する球面座標系 (λ, ϕ, Z) を用いる。ただし、 λ は経度、 ϕ は緯度、 Z はジオイドから上向き鉛直高さである。なお、地球の自転角速度を $\omega = 7.292 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ とし、重力加速度を $g = 979.8 \text{ cm/s}^2$ とする。

これまでの報告で述べた通り、風成大循環を取り扱うためには、基礎方程式として非圧縮粘性流体の連続の方程式と、運動方程式のみを考えればよい。もともとの基礎方程式である瞬間量 $u, v,$

w, p に関する連続の方程式及び運動方程式をく付録>に記す。ただし, u, v, w, p はそれぞれ λ, φ, Z 方向速度及び圧力であり, ρ は密度を表す。これらの基礎方程式の時間平均をとることによって導出される Reynolds 方程式において, 未知量となる Reynolds 応力に対して Boussinesq の“渦動粘性係数モデル”を用いる³⁾。

こうして得られた時間平均量 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}$ に関する連続の方程式及び運動方程式に対して, 風成大循環に関する近似を行なう。まず線形化を行うが, これは代表スケールで運動方程式を無次元化したとき, 移流項の係数となる Rossby 数が小さいと仮定したことになる。さらに, 鉛直方向速度 $\bar{w}$ は非常に小さいとして近似を行う。このとき, 時間平均量に関する基礎方程式は次のようになる。

連続の方程式:

$$\frac{1}{R \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{v} \cos \varphi) \right\} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} = 0 \quad \dots\dots (2.1)$$

運動方程式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho R \cos \varphi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda} + f \bar{v} \\ & + \frac{A}{R^2} \left(\Delta_h \bar{u} - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \bar{u} - \frac{2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} \right) + k \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Z^2} \end{aligned} \quad \dots\dots (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} - f \bar{u} \\ & + \frac{A}{R^2} \left(\Delta_h \bar{v} - \frac{1}{\cos^2 \varphi} \bar{v} + \frac{2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \lambda} \right) + k \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Z^2} \end{aligned} \quad \dots\dots (2.3)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial Z} - g \quad \dots\dots (2.4)$$

ただし, $f = 2 \omega \sin \varphi$ は Coriolis のパラメータ, Δ_h は無次元の水平 Laplacian であり次式で定義されている。

$$\Delta_h \equiv \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad \dots (2.5)$$

なお, 静水圧近似式 (2.4) は, 今回のシミュレーションには使われなかった。

これまでの報告¹²⁾と同様に, 海底 ($Z=D$) から海面 ($Z=0$) まで, (2.1)~(2.3) 式を Z で偏積分して体積輸送量に関する基礎方程式が得られる。その際, 海面では rigi-lid の仮定による“滑る固い蓋の条件” ($[\bar{w}]_{Z=0}=0$), 海底では“滑りなし条件” ($[\bar{u}]_{Z=D}=[\bar{v}]_{Z=D}=[\bar{w}]_{Z=D}=0$) が用いられる。

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (V \cos \varphi) = 0 \quad \dots\dots (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = & -\frac{1}{R \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial P}{\partial \lambda} + \frac{\partial D}{\partial \lambda} \left[\frac{\bar{p}}{\rho} \right]_{Z=D} \right\} + f V \\ & + \frac{A}{R^2} \left(\Delta_h U - \frac{1}{\cos^2 \varphi} U - \frac{2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) \\ & + \left[\frac{\bar{u}}{\rho} \right]_{Z=0} - \left[\frac{\bar{u}}{\rho} \right]_{Z=D} \quad \dots\dots (2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = & -\frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial D}{\partial \varphi} \left[\frac{\bar{p}}{\rho} \right]_{Z=D} \right\} - f U \\ & + \frac{A}{R^2} \left(\Delta_h V - \frac{1}{\cos^2 \varphi} V + \frac{2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right) \\ & + \left[\frac{\bar{v}}{\rho} \right]_{Z=0} - \left[\frac{\bar{v}}{\rho} \right]_{Z=D} \quad \dots\dots (2.8) \end{aligned}$$

ただし, 体積輸送量 U, V と圧力積分量 P と λ 方向及び φ 方向の渦粘性摩擦応力 $\tau_\lambda, \tau_\varphi$ は, 次のように定義されている。

$$\left. \begin{aligned} U & \equiv \int_0^D \bar{u} dz, \quad V \equiv \int_0^D \bar{v} dz \\ P & \equiv \int_0^D \frac{\bar{p}}{\rho} dz \\ \tau_\lambda & \equiv k \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z}, \quad \tau_\varphi \equiv k \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (2.9)$$

次に, (2.7) と (2.8) 式から圧力積分 P を消去した後, 両辺を $R \cos \varphi$ で割れば, 次の渦度方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = & -\frac{2 \omega}{R} V \cos \varphi \\ & -\frac{1}{R^2 \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\bar{p}}{\rho} \right]_{Z=D} - \frac{\partial D}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\bar{p}}{\rho} \right]_{Z=D} \right\} \\ & + A \nabla_h^2 \zeta + \left[\frac{F}{\rho} \right]_{Z=0} - \left[\frac{F}{\rho} \right]_{Z=D} \quad \dots\dots (2.10) \end{aligned}$$

ただし,

$$\zeta \equiv \text{curl}_z U = \frac{1}{R \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (U \cos \varphi) \right\}$$

; 体積輸送量に関する渦度... (2.11)

$$F \equiv \text{curl}_z \tau = \frac{1}{R \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tau_\lambda \cos \varphi) \right\}$$

$$= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \tau_\lambda}{\partial \varphi} + \tau_\lambda \tan \varphi \right)$$

; 渦粘性摩擦応力ベクトルの回転... (2.12)

$U = (U, V)$; 体積輸送ベクトル... (2.13)

$\tau = (\tau_\lambda, \tau_\varphi)$; 渦粘性摩擦応力ベクトル... (2.14)

$$\nabla_h^2 \equiv \frac{1}{R^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{R^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$= \frac{1}{R^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{R^2} \tan \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

; 有次元の水平Laplacian... (2.15)

(2.10)式における右辺第2項が、海底地形を考慮することによって含まれる項であり、平坦な海底の場合この項は零となる。以下では便宜上、この項のことを“地形性圧力項”と呼ぶことにする。なお、右辺第1項は“惑星 β 効果の項”、右辺第3項は“渦度の拡散項”である。

さらに、(2.6)式が満足されるように、次式によって定義される“体積輸送量に関する流線関数” Φ を導入する。

$$U = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad V = \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \quad \dots (2.16)$$

このとき、(2.11)と(2.16)式によって、 ζ と Φ との間に次の関係式が成り立つ。

$$\zeta = \nabla_h^2 \Phi \quad \dots (2.17)$$

3 渦度方程式における海底地形の影響の取り扱い方

海底地形の影響は、体積輸送量に関する渦度方程式(2.10)の右辺第2項“地形性圧力項”及び最終項“海底摩擦項”に大きく関係しているが、その評価はかなり難しい問題である⁴⁾⁵⁾。海底の摩擦境界層を正確に表現するためには、鉛直方向の格子間隔を非常に細かくしなければならないこと等

が困難の主因である。

本研究では、海底地形を考慮した1層モデルにおいて、二つの方法を試みた。一つは海底Ekman層の直上で地衡流を仮定する方法(方法I)、もう一つは海底の滑りなし条件を用いる方法(方法II)である。特に、後者は今回全く新しく考案された試みである。

3.1 海底Ekman層の直上で地衡流を仮定する方法(方法I)

まず、海底Ekman層の直上で地衡流近似が成り立つとして、(2.10)式における水平圧力勾配を次のように近似する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\bar{p}}{\rho} \right]_{z=D} &= R \cos \varphi \cdot f[\bar{v}]_{z=D+\delta} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\bar{p}}{\rho} \right]_{z=D} &= -R \cdot f[\bar{u}]_{z=D+\delta} \end{aligned} \right\} \quad \dots (3.1)$$

このとき、渦度方程式(2.10)は次式となる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{2\omega}{R} V \cos \varphi$$

$$- \frac{f}{R} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial D}{\partial \lambda} [\bar{u}]_{z=D+\delta} + \frac{\partial D}{\partial \varphi} [\bar{v}]_{z=D+\delta} \right)$$

$$+ A \nabla_h^2 \zeta + \left[\frac{F}{\rho} \right]_{z=0} - \left[\frac{F}{\rho} \right]_{z=D} \quad \dots (3.2)$$

ただし、 δ は海底Ekman層の厚さである。なお、このとき、(3.2)式の右辺第1項が“惑星 β 効果”を表しているのに対し、右辺第2項の地形性圧力項は“地形性 β 効果”に関係していることが分る。

さらに、海底Ekman層直上の速度が、鉛直方向に平均された速度に比例すると仮定する。つまり、

$$[\bar{u}]_{z=D+\delta} = \sigma \frac{U}{(-D)}, \quad [\bar{v}]_{z=D+\delta} = \sigma \frac{V}{(-D)} \quad \dots (3.3)$$

ただし、 σ は比例定数であり、 D は負値であるから $(-D)$ は正値である。よって、 σ をある正値にとったときは、下層においては上層の流れに対する逆流は存在しないと仮定したことになる。このとき、渦度方程式(3.2)は次式となる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{2\omega}{R} V \cos \varphi$$

$$+ \frac{2\omega}{R} \frac{\sigma \sin \varphi}{D} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial D}{\partial \lambda} U + \frac{\partial D}{\partial \varphi} V \right)$$

$$+ A \nabla_h^2 \zeta + \left[\frac{F}{\rho} \right]_{z=0} \quad \dots (3.4)$$

ただし、(3.4)式において、海底摩擦の項は小さいとして無視されている。

3.2 海底の滑りなし条件を用いる方法(方法II)

海底において滑りなし条件つまり水平速度が零という条件を用いて、水平速度に関する運動方程式を評価する。すなわち、(2.2)及び(2.3)式において海底 ($Z=D$) で $\bar{u}=\bar{v}=0$ とすれば、次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\bar{p}}{\rho} \right]_{Z=D} &\approx R \cos \varphi \left[k \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Z^2} \right]_{Z=D} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\bar{p}}{\rho} \right]_{Z=D} &\approx R \left[k \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Z^2} \right]_{Z=D} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.5)$$

このとき、渦度方程式(2.10)は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{2\omega}{R} V \cos \varphi \\ &- \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial D}{\partial \varphi} \left[k \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Z^2} \right]_{Z=D} - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial D}{\partial \lambda} \left[k \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Z^2} \right]_{Z=D} \right\} \\ &+ A \nabla_{\lambda}^2 \zeta + \left[\frac{F}{\rho} \right]_{Z=0} - \left[\frac{F}{\rho} \right]_{Z=D} \dots\dots (3.6) \end{aligned}$$

さて、(3.6)式を見ると、右辺第2項の“地形性圧力項”と最終項の“海底摩擦項”の評価方法が不明である。そこで、これらの項を評価するために、少々粗い方法であるが、水平速度 $\bar{u}$ と $\bar{v}$ の鉛直方向分布を Z の2次関数で近似する方法を試みた。つまり、

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= a_1 Z^2 + b_1 Z + c_1 \\ \bar{v} &= a_2 Z^2 + b_2 Z + c_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.7)$$

と仮定すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} &= 2a_1 Z + b_1, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} = 2a_2 Z + b_2 \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Z^2} &= 2a_1, \quad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Z^2} = 2a_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.8)$$

となる。ただし、係数 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ は λ と φ の関数である。これらの未定係数を、海面応力の条件と海底の滑りなし条件と体積輸送量の三つの条件から決定する。

まず、海面 ($Z=0$) において、海の渦粘性摩擦応力が風の応力と一致するという条件は、(2.9)

及び(3.8)式によって、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} [\tau_{\lambda}]_{Z=0} &= \left[k \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \right]_{Z=0} = [k \rho]_{Z=0} \cdot b_1 \\ [\tau_{\varphi}]_{Z=0} &= \left[k \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \right]_{Z=0} = [k \rho]_{Z=0} \cdot b_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.9)$$

次に、海底において水平速度が零であるという条件は、(3.7)式より次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 D^2 + b_1 D + c_1 &= 0 \\ a_2 D^2 + b_2 D + c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.10)$$

最後に、体積輸送量の条件は、その定義式(2.9)及び(3.7)式によって、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U &= \int_0^D \bar{u} \partial Z = - \left(\frac{a_1}{3} D^3 + \frac{b_1}{2} D^2 + c_1 D \right) \\ V &= \int_0^D \bar{v} \partial Z = - \left(\frac{a_2}{3} D^3 + \frac{b_2}{2} D^2 + c_2 D \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.11)$$

以上の(3.9)、(3.10)、(3.11)式より、未定係数を決定すれば以下の通りとなる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2} \left(\frac{U}{D^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_{\lambda}}{k \rho} \right]_{Z=0} \right) / D \\ a_2 &= \frac{3}{2} \left(\frac{V}{D^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_{\varphi}}{k \rho} \right]_{Z=0} \right) / D \\ b_1 &= \left[\frac{\tau_{\lambda}}{k \rho} \right]_{Z=0}, \quad b_2 = \left[\frac{\tau_{\varphi}}{k \rho} \right]_{Z=0} \\ c_1 &= - \frac{3}{2} \frac{U}{D} - \frac{1}{4} \left[\frac{\tau_{\lambda}}{k \rho} \right]_{Z=0} \cdot D \\ c_2 &= - \frac{3}{2} \frac{V}{D} - \frac{1}{4} \left[\frac{\tau_{\varphi}}{k \rho} \right]_{Z=0} \cdot D \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.12)$$

よって、(3.6)式に含まれる未知の項は、(3.12)式より以下のように評価される。

$$\left. \begin{aligned} \left[k \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Z^2} \right]_{Z=D} &= 2a_1 [k]_{Z=D} \\ \left[k \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial Z^2} \right]_{Z=D} &= 2a_2 [k]_{Z=D} \\ [\tau_{\lambda}]_{Z=D} &= [k \rho]_{Z=D} (2a_1 D + b_1) \\ [\tau_{\varphi}]_{Z=D} &= [k \rho]_{Z=D} (2a_2 D + b_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.13)$$

したがって、(3.13)式を用いれば、渦度方程式(3.6)は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = & -\frac{2\omega}{R} V \cos \varphi \\ & -\frac{3}{RD} \left\{ \frac{\partial D}{\partial \varphi} \left(k \frac{U}{D^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_\lambda}{\rho} \right]_{z=0} \right) - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial D}{\partial \lambda} \right. \\ & \times \left(k \frac{V}{D^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_\varphi}{\rho} \right]_{z=0} \right) \left. \right\} + A \nabla_h^2 \zeta + \frac{3}{2} \left[\frac{F}{\rho} \right]_{z=0} - \frac{3k}{R} \\ & \times \left\{ \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{V}{D^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U}{D^2} \right) + \frac{U}{D^2} \tan \varphi \right\} \dots (3.14) \end{aligned}$$

ただし、(3.14)式の導出の際には、鉛直渦動粘性係数 κ は一定値としている。しかし、実際の海では、海面近傍の方が海底近傍よりも流れの変動が大きいと思われるので、海面における κ の値の方が大きいと予想される。

4 結果及び考察

今回は、第2報²⁾の続きとして、海底が平坦な場合及び海底地形を考慮した場合について、実測された風の海面応力を使って、北太平洋の風成大循環の数値シミュレーションを行った。まず図1に、本報告で用いた“実際的な海域”に対するメッシュ図を与えた。これまでと同様に、緯度・経度方向ともに2度のメッシュを使っている。海面における風の応力データとしては、Hellerman, S.⁹⁾による年平均值を使ったが、5度メッシュのデータを2度メッシュに補間して使用した。図2に本報告の計算に用いられた、2度メッシュの海面における風の応力ベクトルを与えた。赤道から北緯30度位までは主に北東から南西へ向かう“貿易風”、北緯30度位から60度までは主に南西から北東へ向かう“偏西風”が存在することが分る。さらに、図3に、その応力ベクトルの回転の等値線を描いている。図中の陰影を施した部分は風の海面応力ベクトルの回転 F が負値であることを示し、陰影を施していない部分は F が正値である。さらに、その境界が零値であり、等値線の間隔は $0.5 \times 10^{-8} \text{ dyn/cm}^2$ として描かれている。図3から、 F の符号は大きく三つの領域によって異なることが分る。すなわち、 F は赤道から北緯15度位までの間では東部赤道域を除いてほとんど正値、北緯15度位から40度位までの間ではほとんどすべて負値、40度位か

ら60度までの間ではほとんど正値であることが分る。 F は大体 10^{-8} dyn/cm^2 程度である。渦度方程式(2.10)においては、この風の海面応力ベクトルの回転 F が外力項となっており、これによって風成大循環が駆動されることになる⁷⁾。次に、海底地形の風成大循環の影響を調べる際に用いた海の深さのデータを、等高線(1000m間隔)の形で図4に与えた。今回使ったデータは、米国スクリップス海洋研究所による1度メッシュデータであるが、数値シミュレーションに使用する際には、2度メッシュで平均して用いた。

さて、海底が平坦な場合における数値シミュレーションの結果のとして、体積輸送量 U 及び V に関する流線関数 Φ の等値線である“体積輸送流線”を図5に与えた。海岸及び赤道で Φ つまり“体積流量”を零とし、流線の間隔を $5 S_v$ ($1 S_v = 10^{12} \text{ cm}^3/\text{s}$)として描かれている。体積輸送はこの流線に沿って行われ、流線が密な場所ほど体積輸送量が多いことを示す。図中で陰影を施した部分は Φ が負値をとり、輸送が反時計回りに行われることを示す。逆に、陰影を施していない部分は Φ が正値をとり、輸送が時計回りに行われることを表している。また、図6にその場合の体積輸送ベクトルを与えた。図5及び図6から、北太平洋の風成大循環は大きく三つの循環系 (gyre) から構成されていることが分る。すなわち、赤道から北緯15度位までの間は東部赤道域を除けば反時計回りの“熱帯循環系”、北緯15度位から40度位までの間は時計回りの“亜熱帯循環系”、40度位から60度までの間は反時計回りの“亜寒帯循環系”である。これらの三つの循環系は図3の F の正負による三つの区分に大体対応していることに気がつく。これは平坦な海底の場合に外洋で成り立つとして知られる“Sverdrupの関係式”から理解できる⁸⁾。一方、亜熱帯循環系の西岸近くには、“惑星 β 効果”による西岸強化現象として生じる黒潮の存在が目立っている。また、亜寒帯循環系の西岸近くには、親潮の存在も確認できる。さらに、赤道上の西半分には東向きの流れ、東半分には西向きの流れが見られ、それぞれ赤道反流と赤道海流(南赤道海流)に対応すると思われる。ただし、赤道近くでは、本モデルで考慮していない非線形性や湧昇の存在等も重要であると思われるし、さらに今回の計算では便宜上、

赤道上で南北対称条件を課しているため、赤道近傍の流れがうまく再現されているか否かはやや不明である。なお、この場合の数値シミュレーションにおける最大の体積流量は $45.0Sv$ ($i=4, j=15$)、最小の体積流量は $-24.4Sv$ ($i=24, j=27$)であり、最大・最小の体積輸送量は $U_{max}=7.67 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=9, j=18$)、 $U_{min}=-5.08 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=22, j=28$)、 $V_{max}=10.9 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=3, j=15$)、 $V_{min}=-4.96 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=14, j=27$)、 $\sqrt{(U^2+V^2)}_{max}=10.9 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=3, j=15$)であった。

次に、海底地形の風成大循環に及ぼす影響を調べた。図7及び図8は、海底地形を考慮した場合の方法Iによる体積輸送流線及び体積輸送ベクトルである。ただし、(3.3)式における未知定数 σ を試験的に0.05としている。これは、海底Ekman層の直上の水平速度が、鉛直方向に平均された水平速度の20分の1であると仮定されたことになる。体積輸送流線を見ると、平坦な海底の場合と比較して赤道から北緯30度位までの間に大きな違いが見られないが、北緯40度位から60度位までの亜寒帯循環系に顕著な違いが現れている。また、東シナ海の反時計回りの流れ及びオホーツク海の時計回りの流れが目立つが、これらはどちらも浅い海である。この高緯度及び浅い海において海底地形の影響が大きく現れた理由は、渦度方程式(3.4)の右辺第2項における係数が、 $\sin\phi$ に比例し深さ(-D)に反比例する形であることから理解できる。なお、この場合の数値シミュレーションにおける最大の体積流量は $43.8Sv$ ($i=4, j=14$)、最小の体積流量は $-18.8Sv$ ($i=24, j=27$)であり、最大・最小の体積輸送量は $U_{max}=8.59 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=7, j=17$)、 $U_{min}=-6.10 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=4, j=12$)、 $V_{max}=9.81 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=3, j=14$)、 $V_{min}=-3.94 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=4, j=24$)、 $\sqrt{(U^2+V^2)}_{max}=9.93 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=3, j=14$)であった。

図9及び図10は、海底地形を考慮した場合の方法IIによる体積輸送流線及び体積輸送ベクトルである。方法Iのときと同様に、高緯度地帯及び浅い海において、海底地形の影響が大きく現れている。オホーツク海における時計回りの流れと黄海付近における反時計回りの流れの存在、さらに東

シナ海における黒潮が大陸棚の縁の等深線に沿って流れていること等が、方法Iのときと同じ結果である。特に方法IIでは、ベーリング海に時計回りの大規模な流れが生じ、アラスカ海流がうまく再現されている点が注目される。なお、この場合の数値シミュレーションにおける最大の体積流量は $71.7Sv$ ($i=8, j=16$)、最小の体積流量は $-21.6Sv$ ($i=42, j=27$)であり、最大・最小の体積輸送量は $U_{max}=14.3 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=9, j=18$)、 $U_{min}=-8.04 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=4, j=12$)、 $V_{max}=14.7 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=3, j=14$)、 $V_{min}=-4.29 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=43, j=30$)、 $\sqrt{(U^2+V^2)}_{max}=15.1 \times 10^5 cm^2/s$ ($i=8, j=18$)であった。方法Iに比べ体積流量がかなり大きくなった理由は、(3.14)式における海面応力の回転の項が、海底摩擦力のために実質上1.5倍になっていることから理解できる。しかし、補足的計算によって、海底地形の風成大循環への影響は、渦度方程式における“海底摩擦項”よりも“地形性圧力項”によって、より大きく効いていることが確認された。

ちなみに、2節で述べた通り、今回の計算では静水圧近似式を使わなかったが、もし静水圧近似式(2.4)を使用するならば、今回使用している密度に関するBoussinesq近似($\partial\rho/\partial\lambda=\partial\rho/\partial\phi=0$)によって、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda}\right)=\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \phi}\right)=0 \quad (4.1)$$

さらに、もし地衡流の式；

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho R \cos \phi} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \lambda} &= f \bar{v} \\ \frac{1}{\rho R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \phi} &= -f \bar{u} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

を考えるならば、(4.1)式より

$$\frac{\partial}{\partial Z}(\rho \bar{u})=\frac{\partial}{\partial Z}(\rho \bar{v})=0 \quad (4.3)$$

となる。したがって、もし一様密度($\rho=\text{const.}$)の場合は、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial Z}=\frac{\partial \bar{v}}{\partial Z}=0 \quad (4.4)$$

となり、水平速度は鉛直方向に変化しないことになる。一方、この条件の下では、(4.2)式を海底($Z=D$)から海面($Z=0$)まで積分することによって、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\bar{p}}{\rho} \right) &= R \cos \varphi \cdot f \frac{V}{(-D)} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\bar{p}}{\rho} \right) &= -R \cdot f \frac{U}{(-D)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.5)$$

これは、今回の研究における(3.1)および(3.3)式に関連した式である。念のために、本研究に用いられた各近似の精度を再確認する必要があると思われる。

なお、本研究では“風成大循環”を考えたが、これは実際の海では表層においてのみ支配的であると思われる。深層では密度差を駆動力とする“熱塩大循環”が重要であり、海底地形の影響は深層流によるところが大きいと考えられる。今回用いた“1層風成大循環モデル”によって、海底地形を考慮した北太平洋の循環系 (gyre) の様子が定性的に再現できた。しかしながら、特に海底地形の取り扱い方には任意性が残り、海洋大循環の定量的な数値シミュレーションのためには、今後は風成大循環と熱塩大循環を組み合わせた多層モデルへの拡張が要求される。

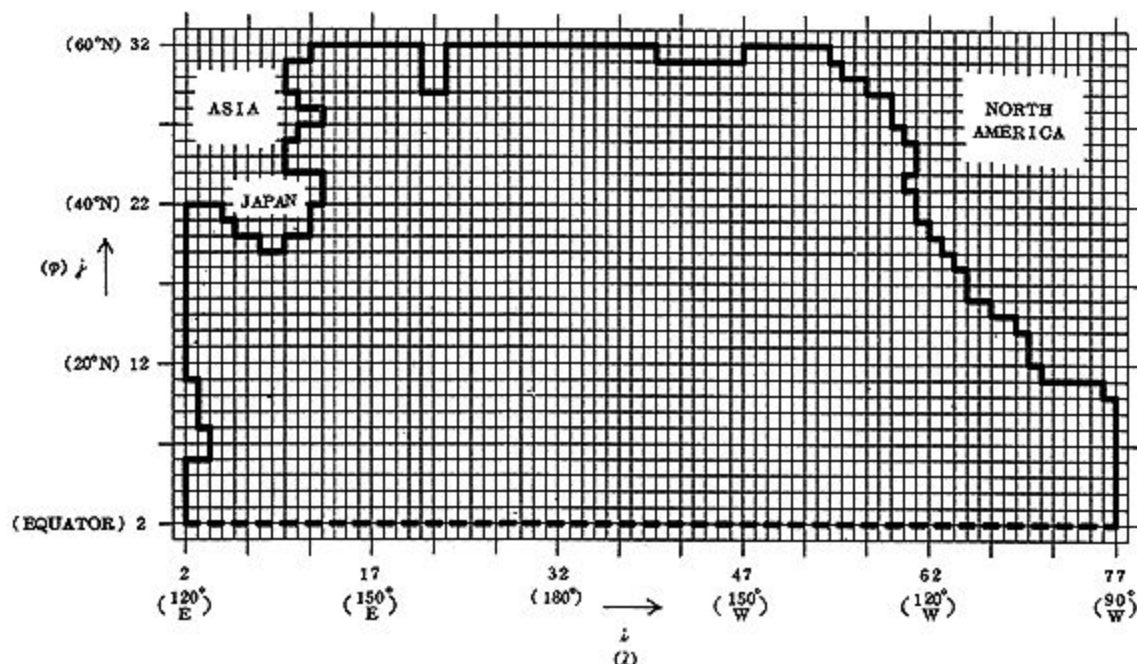


図1 実際の海域に対するメッシュ図
Fig.1 Mesh diagram for actual Ocean

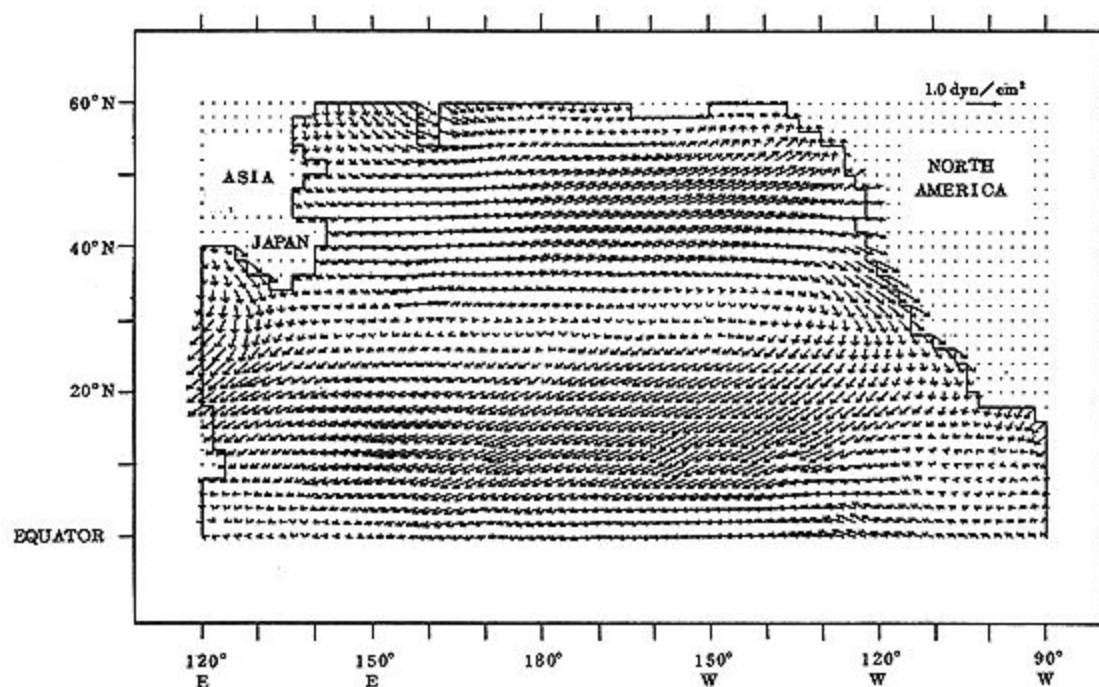


図2 海面における風の応力ベクトル
Fig.1 Wind stress vectors on sea surface

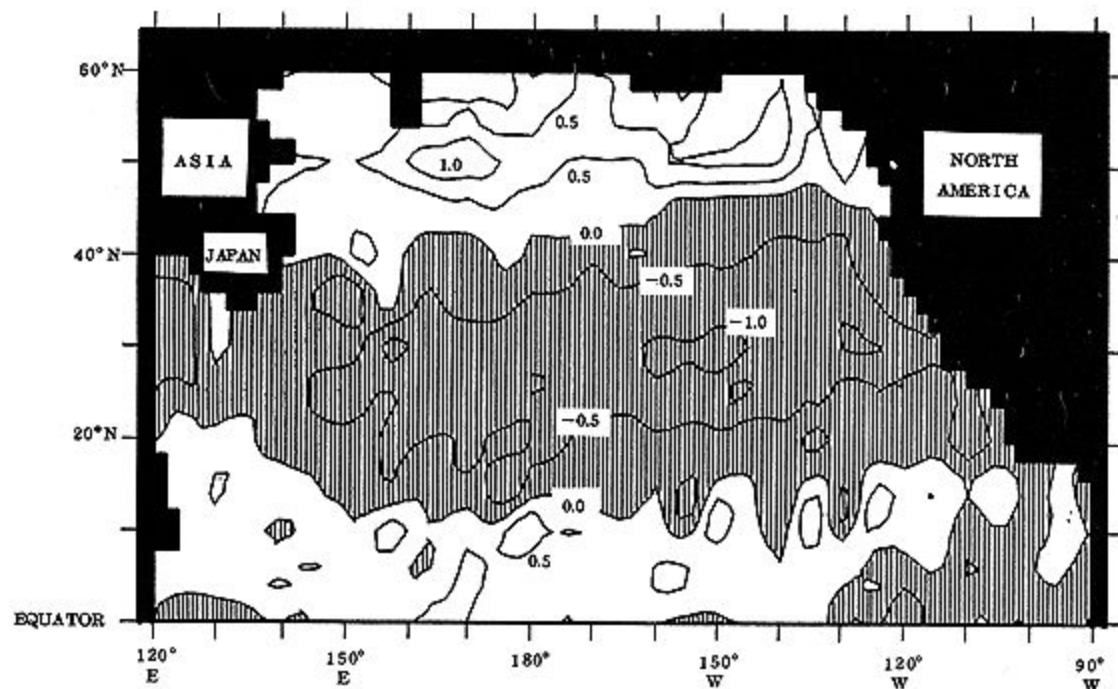


図 3 海面における風の応力ベクトルの回転の等値線 [単位 10^{-8} dyn/cm³]
Fig.3 Contours of rotation of wind stress vectors on sea surface

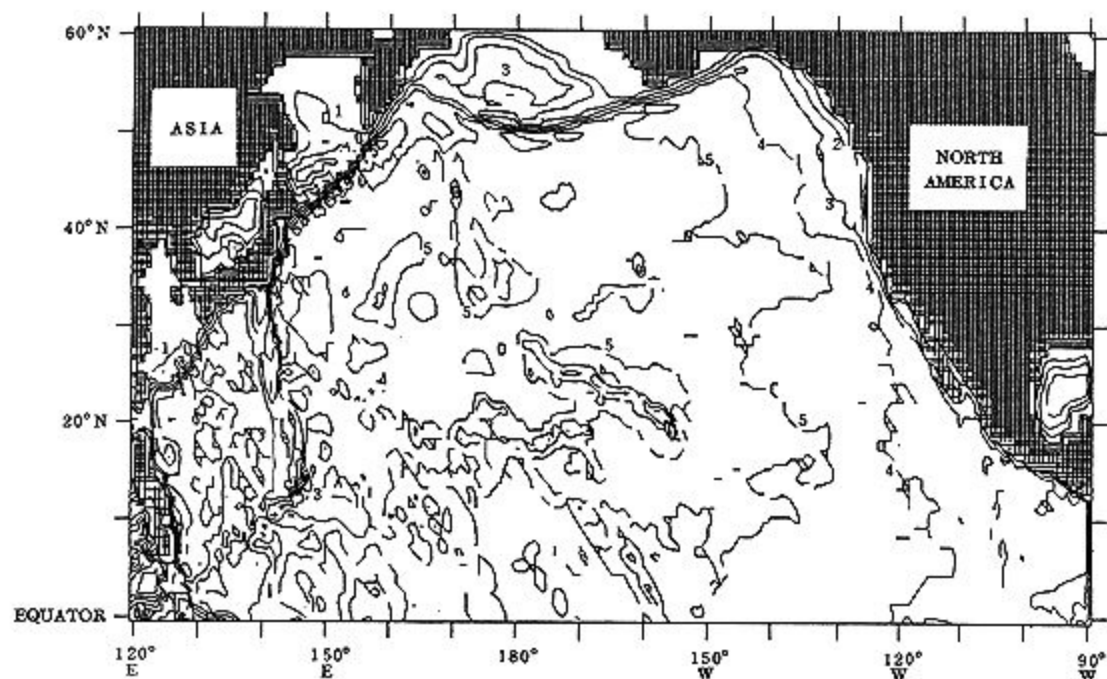


図4 北太平洋の海底地形〔単位：1000m〕

Fig.4 Bottom topography of North Pacific Ocean

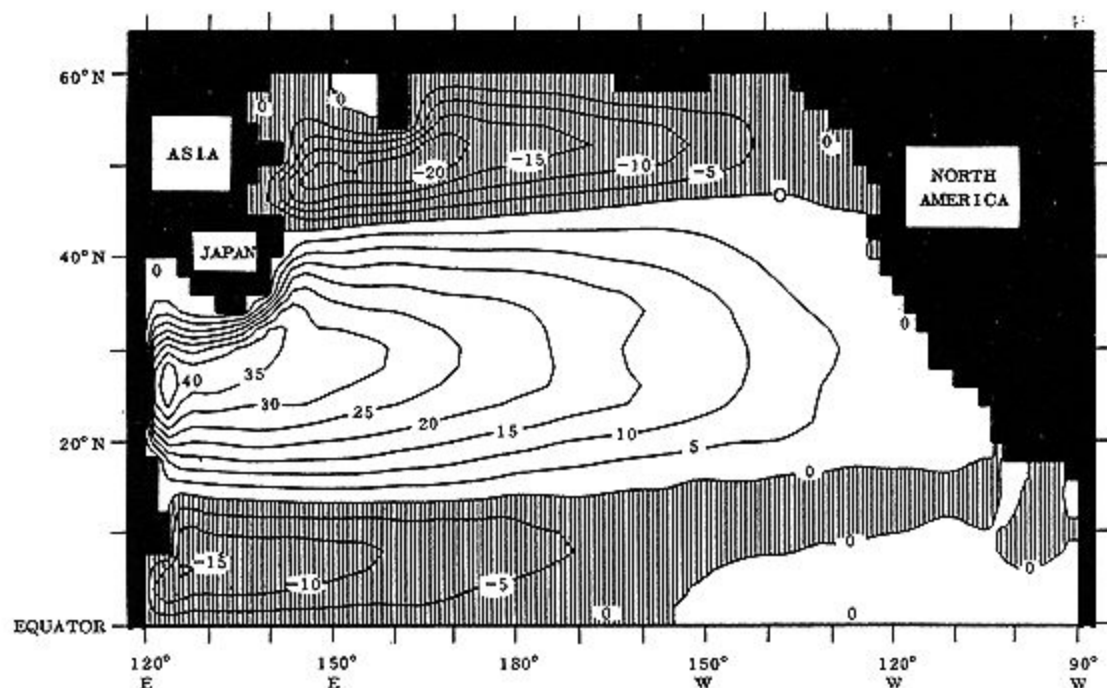


図5 平坦な海底の場合の体積輸送流線〔単位： S_v 〕

Fig.5 Volume transport streamlines in the case of flat bottom

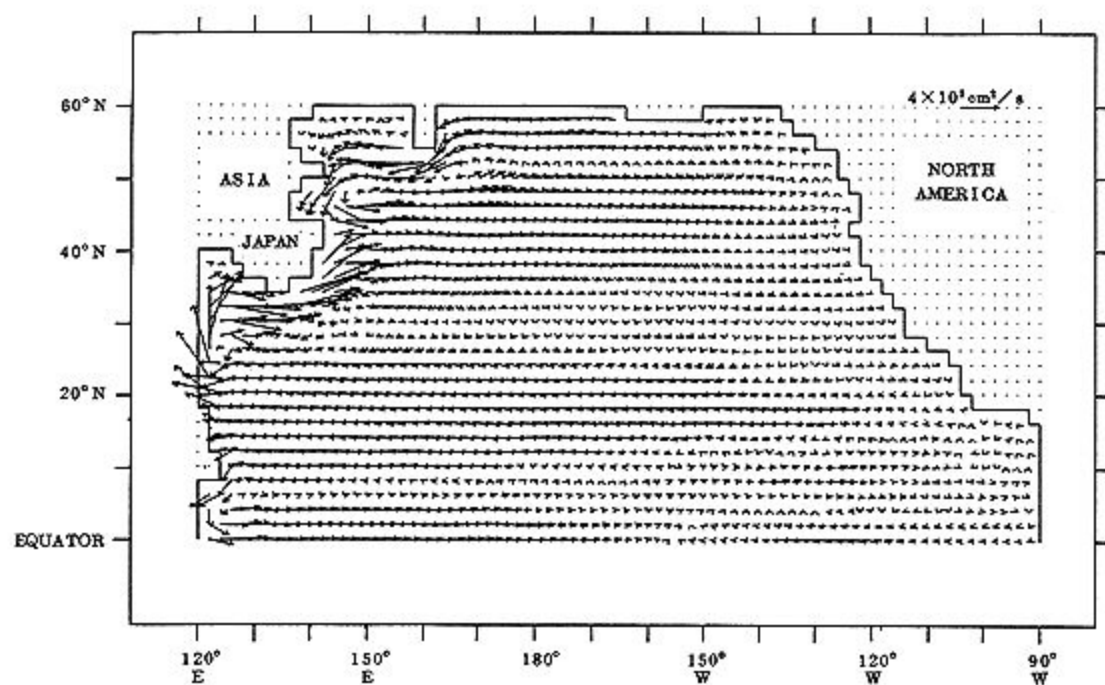


図6 平坦な海底の場合の体積輸送ベクトル

Fig.6 Volume transport vectors in the case of flat bottom

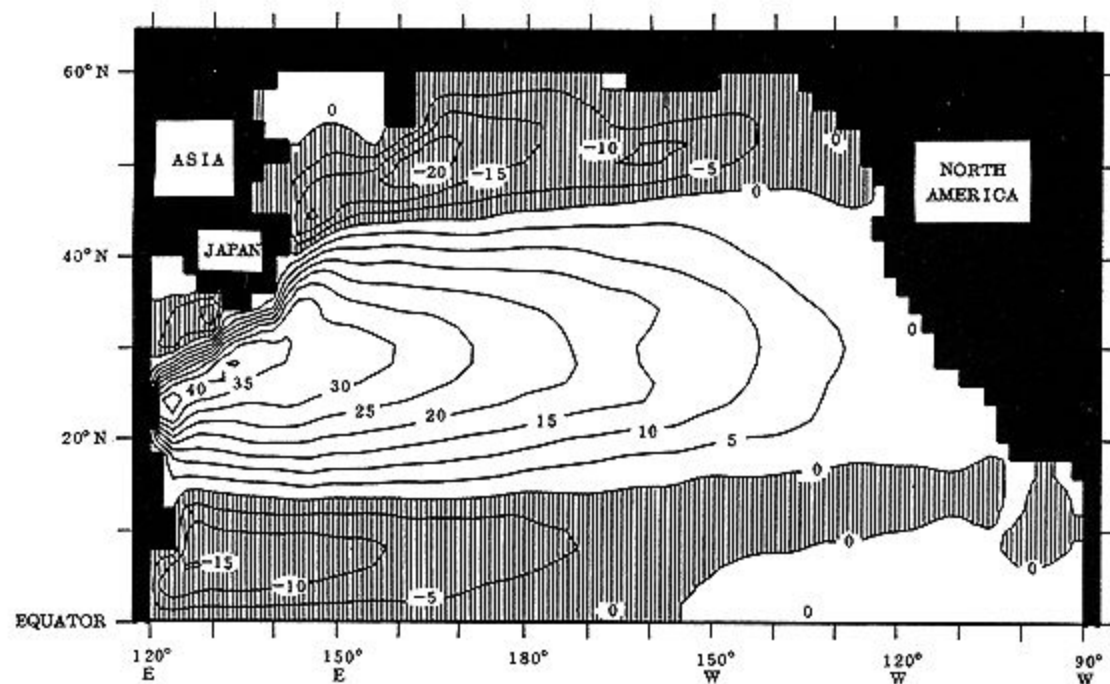


図7 海底地形を考慮した場合の体積輸送流線 (方法I) [単位: S_v]

Fig.7 Volume transport streamlines in the case with bottom topography (Method I)

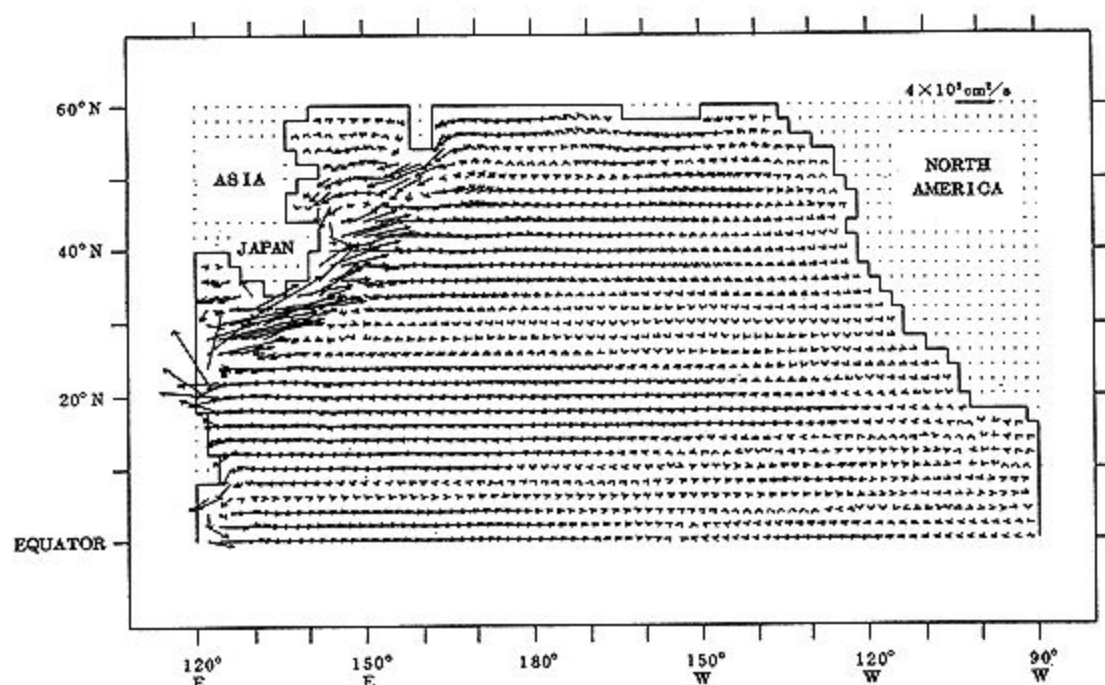


図8 海底地形を考慮した場合の体積輸送ベクトル (方法I)

Fig.8 Volume transport vectors in the case with bottom topography (Method I)

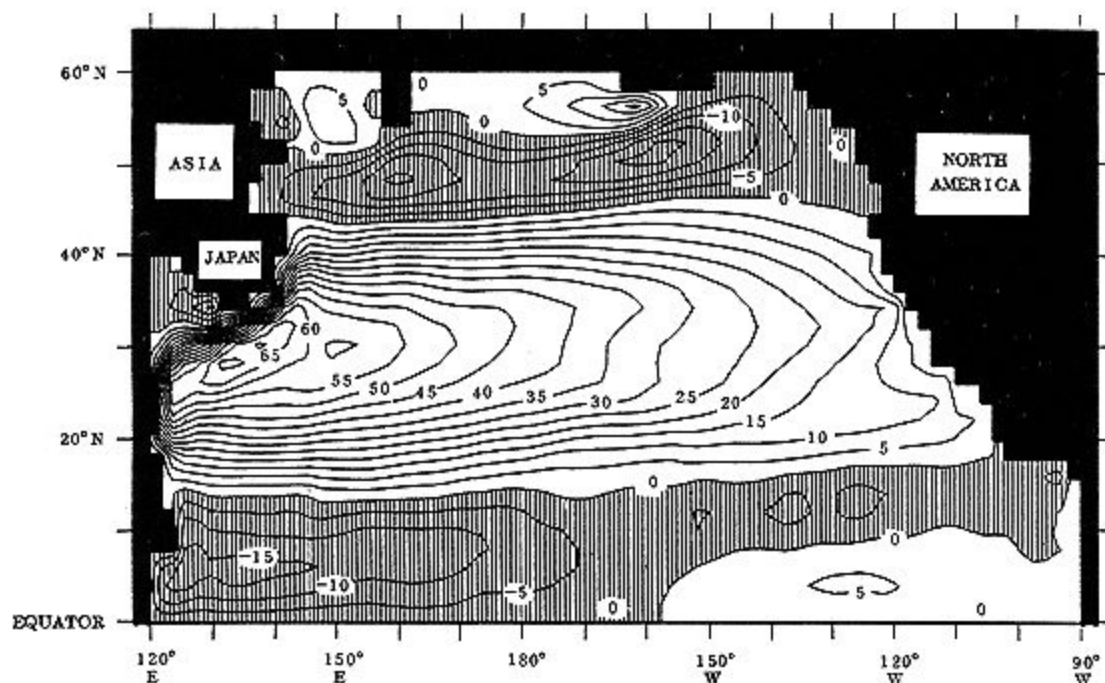


図9 海底地形を考慮した場合の体積輸送流線 (方法II) [単位: S_v]

Fig.9 Volume transport streamlines in the case with bottom topography (Method II)

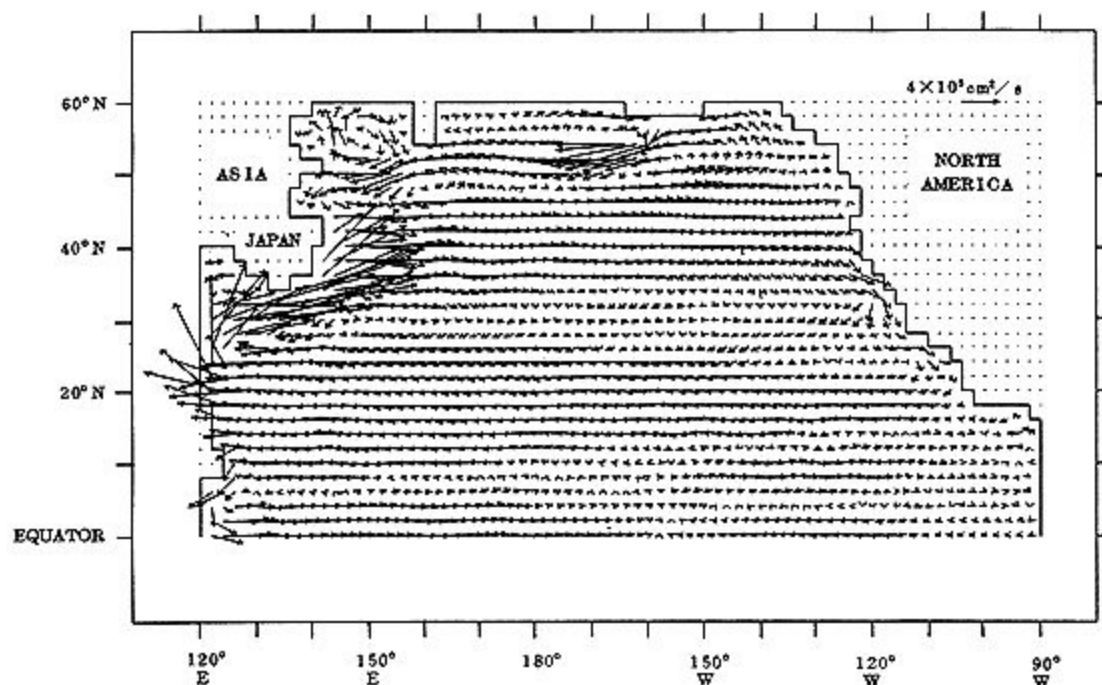


図10 海底地形を考慮した場合の体積輸送ベクトル (方法II)

Fig.10 Volume transport vectors in the case with bottom topography (Method II)

5 おわりに

北太平洋に対する風成大循環モデルについてのまとめとして、実測された風の海面応力と実測された海底地形を使用して、それらの取り扱い方を考察すると共に、風成大循環に及ぼす影響を調べた。

まず、平坦な海底の場合について、実測された風の海面応力を用いて数値シミュレーションを行った。その結果、北太平洋における大きな三つの循環系 (gyre)、すなわち熱帯循環系・亜熱帯循環系・亜寒帯循環系がうまく再現された。また、惑星 β 効果による黒潮に代表される西岸強化現象も明確に現れた。

次に、海底地形も考慮した場合について、実測された風の海面応力を用いて数値シミュレーションを行った。その際、1層モデルにおける海底地形の取り扱い方として、二つの方法を試みた。一つは海底Ekman層の直上で地衡流を仮定する方法

であり、もう一つは海底の滑りなし条件を用いる方法である。前者の方法は、海底Ekman層直上の速度が未知であることが欠点であるが、今回の計算では水平速度が鉛直平均速度の20分の1であると仮定してみた。後者の方法は、海面から海底までの水平速度を z の2次関数で近似する点に少々無理はあるが、その未定係数が既知条件によって一意的に決定される点が長所である。両者の結果によれば共に、海底地形の影響は高緯度 (特に北緯40度程度以上の高緯度) 及び浅い海 (北太平洋の平均深さは約4000mであるが、特に500m程度以下の浅い海) において大きく効き、平坦な海の場合に比べ体積輸送状態に変化が現れることが示された。

ところで、今回行った数値シミュレーションでは、2度メッシュを用い、しかも運動方程式の線形化を行っている。これでは非線形性の強い中規模渦の再現は不可能であると思われるが、本研究

では循環系 (gyre) 程度の大規模スケールの風成大循環を再現することを第1目標としているため、Rossby数はかなり小さいと予想され、線形化及び2度メッシュは悪い近似ではないと思われる。また、海底地形の取り扱い方として試みた方法は、どちらも1層モデルゆえに少々不満足な点を残すが、多層モデルへの応用等を考えれば有効な方法としての可能性があると思われる。

本稿を終るにあたり、本研究に際して海洋物理学に関する有益な御助言を賜った同研究部の緑川弘毅主査に感謝の意を表します。さらに、同研究部の宗山敬主幹を始め、本研究の遂行に関連し援助してくださった方々に、お礼を申し上げます。また、本研究における数値計算はすべて当センター所有のDEC社製VAX8800によって行われたが、コンピューター利用に際してお世話になった浅沼市男氏ならびに電子計算機室各位に謝意を表します。

参考文献

- 1) 黒山順二：北太平洋に対する風成海洋大循環モデルについて，海洋科学技術センター試験研究報告，22，145-172. (1989)
- 2) 黒山順二：北太平洋に対する風成海洋大循環モデルについて(第2報)，海洋科学技術センター試験研究報告，24，223-256. (1990)
- 3) Pedlosky, J. : Geophysical Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 710pp. (1987)
- 4) 高野建三：第I編 海洋大循環，1-128，海洋物理II，増沢譲太郎編，東海大学出版会。(1972)
- 5) 杉ノ原信夫・大西行雄：第15章数値研究—その手法—，234-271，環境科学としての海洋学2，堀部純男編，東京大学出版会。(1978)
- 6) Hellerman, S. : An updated estimate of the wind stress on the world ocean, Monthly Weather Review. 95,607-626; corrected tables, ibid. 96, 63-74. (1967, 1968)
- 7) 友田好文・高野建三：海洋，共立出版，261pp. (1983)
- 8) Pond, S. ・Pickard, G. L. : Introductory Dynamical Oceanography, Pergamon Press, 329pp. (1986)
- 9) 安達忠次：ベクトルとテンソル，培風館，159pp. (1984)
- 10) バチエラー，G. K. (橋本英典・松信八十男ほか共訳)：入門流体力学，東京電機大学出版会，614pp. (1981)
- 11) 古屋善正：流体力学II，共立出版，158pp. (1978)
- 12) Gill, A. E. : Atmosphere-Ocean Dynamics, Academic Press, 662pp. (1982)

(原稿受理：1991年5月20日)

<付録> 地球と共に自転する球面座標系における基礎方程式³⁾¹²⁾

本研究において基礎方程式となる「連続の方程式」及び「運動方程式」について、きちんと整理しておく必要性を感じるので、以下に記述することにする。

数学や流体力学の分野においては、通常、静止した球面座標 (r, θ, ϕ) が用いられる (r : 半径, θ : 天頂角, ϕ : 方位角)⁹⁾¹⁰⁾¹¹⁾。このとき、地球の中心を原点としたDescartesの直角座標系 (x^*, y^*, z^*) との間には、次のような関係式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} x^* &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\ y^* &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\ z^* &= r \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{付.1})$$

海洋力学においては、通常、天頂角 θ の代わりに緯度 φ が用いられ、方位角 ϕ としては経度 λ が使われる。そうして、地球の自転と共に回転する球面座標系 (λ, φ, r) が採用される。このときの各速度成分を u, v, w と表し、先程の静止した球面座標系 (r, θ, ϕ) の各速度成分を V_1, V_2, V_3 と表す。すると、両球面座標系の間には、次の関係式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} r &= r, & V_1 &= w \\ \theta &= \pi/2 - \varphi, & V_2 &= -v \\ \phi &= \lambda, & V_3 &= u \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{付.2})$$

よって、海洋力学の基礎方程式は、流体力学の基礎方程式を (付. 2) 式によって変換し、さらに回転の効果と重力の効果を考慮すれば得られる。まず、球面座標系 (λ, φ, r) が静止しているとすれば、非圧縮粘性流体の場合、連続の方程式及び運動方程式 (Navier-Stokes方程式) は、次のように記述される。

連続の方程式：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0 \dots\dots\dots (\text{付.3})$$

運動方程式：

$$(\text{r方向}) : \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} - \frac{u^2 + v^2}{r}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + D \left(\nabla^2 w - \frac{2w}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2v \tan \varphi}{r^2} - \frac{2}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \dots\dots\dots (\text{付.4})$$

$$(\varphi \text{方向}) : \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{wv}{r} + \frac{u^2 \tan \varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{2 \sin \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \dots\dots\dots (\text{付.5})$$

$$(\lambda \text{方向}) : \frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{uw}{r} - \frac{V U \tan \varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{2}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \lambda} - \frac{2 \sin \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) \dots\dots\dots (\text{付.6})$$

ただし、 ν ；分子動粘性係数、

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \dots\dots\dots (\text{付.7})$$

；Laplacian

もし、地球のジオイドを半径 R の球で近似し、ジオイドから鉛直上向きに Z 座標をとれば、

$$Z \equiv r - R \dots\dots\dots (\text{付.8})$$

であるが、 Z は海の深さの範囲で変化するから、

$$|Z| \ll R \dots\dots\dots (\text{付.9})$$

である。そこで、(付.8) 及び (付.9) 式を用いて、連続の方程式 (付.3) と運動方程式 (付.4) ~ (付.6) 式を近似的に変形する。さらに自転の効果と重力の効果を考慮する。すなわち、運動方程式の右辺には、Coriolis 加速度項；

$$-2\omega \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2\omega \sin \varphi \cdot v - 2\omega \cos \varphi \cdot w \\ -2\omega \sin \varphi \cdot u \\ 2\omega \cos \varphi \cdot u \end{pmatrix} \dots\dots (\text{付.10})$$

及び重力加速度項；

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g) \dots\dots\dots (\text{付.11})$$

が付け加えられる。ただし、 ω は地球の自転角速度ベクトル、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ は速度ベクトル、 $\mathbf{g}$ は重力加速度ベクトルを表す。したがって、地球の自転と共に回転する球面座標系(λ, φ, Z)において、非圧縮粘性流体の場合、連続の方程式及び運動方程式(Navier-Stokes方程式)は、次のように記述される。連続の方程式；

$$\frac{1}{R \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right\} + \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{2w}{R} = 0$$

……(付.12)

運動方程式；

$$\begin{aligned} (\lambda \text{方向}): & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{R \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{uw}{R} - \\ & \frac{uv \tan \varphi}{R} = -\frac{1}{\rho R \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\omega \sin \varphi \cdot v - 2\omega \cos \varphi \cdot w + \\ & \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{R^2 \cos^2 \varphi} - \frac{2 \sin \varphi}{R^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{2}{R^2 \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} \right) \end{aligned}$$

…… (付.13)

$$\begin{aligned} (\varphi \text{方向}): & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{u^2 \tan \varphi}{R} \\ & + \frac{vw}{R} = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - 2\omega \sin \varphi \cdot u + \nu \left(\nabla^2 v + \frac{2 \sin \varphi}{R^2 \cos^2 \varphi} \right. \\ & \times \left. \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{v}{R^2 \cos^2 \varphi} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \dots\dots\dots \text{(付.14)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Z \text{方向}): & \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{R \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial Z} - \frac{u^2 + v^2}{R} = - \\ & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Z} + 2\omega \cos \varphi \cdot u - g + \nu \left(\nabla^2 w - \frac{2}{R^2 \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \right. \\ & \left. \frac{2}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2v \tan \varphi}{R^2} - \frac{2w}{R^2} \right) \dots\dots\dots \text{(付.15)} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \nabla^2 = & \frac{1}{R^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{R^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} + \\ & \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \dots\dots\dots \text{(付.16)} \end{aligned}$$

； Laplacian

以上