

カルマンフィルターを用いた 海洋音響トモグラフィデータの解析手法の研究 (I) 準地衡流発展方程式と音響トモグラフィにより 観測される物理量に関するノート

三寺 史夫^{*1, *2} 吉川 泰司^{*1}
新家 富雄^{*3}

海洋音響トモグラフィで観測される物理量(音速および到達時間)と準地衡流方程式系により表現される変数との関連について考察を試みた。連続成層, 二層近似の場合のいずれも, 誤差を含む形式で, 到達時間と音速と準地衡流方程式を関連づけることができる。双方向のトモグラフィを行うと, 両方向の平均到達時間は温度変動(連続成層), あるいは境界面の鉛直方向の変位(二層モデル)を表現し, 一方, 両方向の到達時間差は順圧の流線関数を表現することができる。ここでは, 観測値と方程式系を線形化し, 誤差を考慮した上で両者をカルマンフィルターを用いて対応付ける方法を, 特に二層モデルに関して導いた。

キーワード: 海洋音響トモグラフィ, 準地衡流, カルマンフィルタ

Research on Analysis Methods for Ocean Acoustic tomography data using the Kalman filter (I) - Note on connection between quasi-geostrophic equations and properties from acoustic tomography measurement -

Humio Mitsudera^{*4, *5} Yasushi Yoshikawa^{*4}
Tomio Shinke^{*6}

In this note, relationship between the physical properties measured by the acoustic tomography and variables in the quasi-geostrophic equations is discussed. These are connected as follows: with reciprocal sound transmission, the average travel time gives temperature (continuously stratified model) or displacement of the interface between the layers (two layer model), while the travel time difference represents a barotropic stream function. Here a formula is derived for the two-layer model that connects these variables, including error evolution, through the Kalman filter.

Key words: Ocean Acoustic Tomography, Quasi-Geostrophic Equations, Kalman filter

* 1 海洋科学技術センター 海洋観測研究部 第2研究グループ

* 2 地球フロンティア研究システム・国際太平洋研究センター

* 3 沖電気工業株式会社 先端技術研究センター

* 4 Ocean Research Department, Japan Marine Science and Technology Center

* 5 International Pacific Research Center, Frontier Research System for Global Change

* 6 Advanced Technology Research Division, Oki Electric Industry Co., Ltd

1 はじめに

海洋音響トモグラフィで観測される海洋現象を理解するためには、個々のスナップショットデータの時間発展を注意深く観察することが重要である。また、その物理過程を定性的に理解するためには、簡単な力学モデルによる解釈、あるいは発展形として、データ同化による解釈が重要となる。本稿では、観測される物理量（音速および到達時間）を物理過程に則して理解するため、観測量を準地衡流方程式系に対応付け、観測量がどのような情報をもたらすかという解釈を試みる。また、データのモデル同化に適した形式として、カルマンフィルターを扱い、誤差の共分散行列、カルマンフィルターを書き下す。

以下、基調となる準地衡流近似方程式¹⁾系の考え方として、基礎方程式と渦度方程式、流線関数と水温・塩分場の関係について簡単に記載し、海洋音響トモグラフィ^{2),3)}で観測される音線について、準地衡流の変数との対応を示す。次に、準地衡流方程式を二層近似し、これに対応した観測方程式を導出する。さらに、観測方程式から誤差の共分散行列を示し、準地衡流形式でのカルマンフィルターとの対応をはかる。

2 準地衡流発展方程式

2.1 基礎方程式

運動量の保存は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial y} \quad (2)$$

であらわされる。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u, v), \quad = (x, y) \\ &= {}_0(1 + {}_s(z) + (x, y, z, t)) \\ p &= -{}_0gz + p_s(z) + p(x, y, z, t) \end{aligned}$$

ここで、基本的な成層場を表すのがであり、 ${}_s(z)$ であり、

$$g\rho_s = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_s}{\partial z}$$

が成り立っている。鉛直方向の運動方程式はしたがって

$$\delta\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial z} - g\delta\rho$$

となるが、準地衡流近似では w は非常に小さいとするので、 z 方向の運動方程式は結局

$$\delta\rho = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \quad (3)$$

となる。

また、密度の変動に関しては *Boussinesq* 近似を用いる。

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ (非圧縮性)} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + u \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} + v \frac{\partial \delta\rho}{\partial y} + w \frac{\partial \delta\rho}{\partial z} + w \frac{\partial \rho_s}{\partial z} = 0 \text{ (密度の保存)}$$

あるいは、*Blunt-Vaisala* 振動数 N を用いて書き直すと、

$$\frac{1}{g} N^2 w = \frac{\partial}{\partial t} \delta\rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta\rho + w \frac{\partial \delta\rho}{\partial z} \quad (5)$$

となる。

(4) は海洋の音波とそれに比べて非常に低周波の中規模変動や内部波は分離できる、ということを意味している。

u, v に比べて w が小さい、という準地衡流近似のもとで、もう一度方程式系を書き下すと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial y} \quad (7)$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{\rho_0 g} \frac{\partial \delta p}{\partial z} \quad (8)$$

$$-\left(\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta\rho \right) + \frac{N^2}{g} w = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = (u, v), \quad = (x, y)$$

となる。これらのスケージングは本来は無次元数を用いて行うべきであるが、ここでは便宜的に次元数のもとで行った。

2.2 準地衡流渦度方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} (7) - \frac{\partial}{\partial y} (6) \text{ すると、}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f = 0 \quad (8)$$

ここで、(準)地衡流の近似を用いる。

$$u \sim -\frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial y} \quad (9)$$

$$v \sim \frac{1}{f\rho_0} \frac{\partial \delta p}{\partial x} \quad (10)$$

$$w \sim \left(\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \rho \right) \times \frac{g}{N^2} \quad (11)$$

$$= - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \frac{1}{\rho_0 N^2} \frac{\partial \delta \rho}{\partial z}$$

また,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = - \frac{\partial w}{\partial z} \text{ だが,}$$

$$\|w\| \ll \|u, v\|$$

より, (8) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{df}{dy} \right] - f_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

となる。ここで,

$$f = f_0 + \frac{df}{dy} (y - y_0) \dots$$

としている。 df/dy は 効果と呼ばれ, 以後

$$\beta = \frac{df}{dy}$$

と書く。(12)に(9),(10),(11)を代入すると, 準地衡流渦度方程式が求まる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \left[\frac{1}{\rho_0 f_0} \nabla^2 \delta \rho + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0 N^2} \frac{\partial \delta \rho}{\partial z} \right) + \beta y \right] = 0 \quad (13)$$

さて, p を基準場 $\Psi(x, y, z)$ と変動場 $\psi(x, y, z, t)$ に分けて考える。すなわち

$$p = \Psi(x, y, z) + \psi(x, y, z, t)$$

すると変動場の時間発展を表す方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 f_0} J(\Psi, q) + \frac{1}{\rho_0 f_0} J(\psi, Q) + \frac{1}{\rho_0 f_0} J(\psi, q) = 0 \quad (14a)$$

$$q = \frac{1}{\rho_0 f_0} \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0 N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (14b)$$

$$Q = \frac{1}{\rho_0 f_0} \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0 N^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \beta y \quad (14c)$$

ここで J は *Jacobian*

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}$$

である。

また基準場に関しては,

$$J(\Psi, Q) = 0$$

となり,

$$Q = Q(\Psi)$$

という解が得られる。

2.3 と水温・塩分場の関係

準地衡流近似では

$$\delta \rho = - \frac{1}{\rho_0 g} \frac{\partial \delta \rho}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0 g} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi + \psi)$$

また, 密度は水温, 塩分の関数なので

(note: 非圧縮流体を考えているので, 圧力の関数にはならない)

$$\rho_0 \delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_S \delta T + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_T \delta S$$

いま, 中緯度海域を考えて, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_T \ll \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_S$ とする。(表層

付近)

すると

$$\delta T \approx - \frac{1}{g \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_S} \frac{\partial \delta \rho}{\partial z} = - \frac{1}{g \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_S} \frac{\partial}{\partial z} (\Psi + \psi)$$

したがって, 水温分布を基準場 Γ 変動場 Γ' に分ければ

$$T = \Gamma(x, y, z) + \Gamma'(x, y, z, t)$$

$$\Gamma' = - \frac{1}{g \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_S} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (15)$$

3 音線のモデル化

OATにおける音の到達時間のずれ(シグナル)を

$$\Delta T_i = T_i - T_{0i} = - \int_{Soj} \frac{\Delta c(x, y, z, t)}{c_0(x, y, z)} ds + \varepsilon^{NL} \quad (16)$$

とする。ここで, T_i は i 番目の音線の到達時間(観測値), T_{0i} は基準場より求めたもの, T_i は基準場からのずれ, Soj は j 番目の音線である。また

$$\alpha(x, y, z, t) = c(x, y, z, t) - c_0(x, y, z, t)$$

は基準場 c_0 に海洋変動等によって加わった現象によって

生ずる音速の変化である。 ϵ^{NL} は線形化によって生じたエラーである。
ところで

$$c = c(T, S, p)$$

なので, c は

$$\Delta c = \left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_{S,p} \Delta T + \left(\frac{\partial c}{\partial S}\right)_{T,q} \Delta S + \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{T,S} \Delta p$$

と書くこともできる。ここで, p の項はゆっくりとした海洋変動により生じたある深度での圧力変動であり, 圧縮性によるものではないことに注意されたい。塩分の効果を無視すると, (16)は

$$\Delta T_i \approx - \int_{S_{0i}} \frac{\left(\frac{\partial c}{\partial T}\right) \Delta T + \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right) \Delta p}{c_0^2} ds + \epsilon^{NL}$$

ここで, 準地衡流の変数と結びつける。

$$\Delta T \leftrightarrow T' = - \frac{1}{g \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_S} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\Delta p \leftrightarrow \psi$$

したがって, 到達時間のずれ T_i は準地衡流の変数を用いて次のようにモデル化される。

$$\Delta T_i = - \int_{S_{0i}} \frac{\left(\frac{\partial c}{\partial T}\right)_S \frac{\partial \psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{S,T} \psi}{c_0^2} ds + \epsilon^{NL} \quad (17)$$

4 準地衡2層モデルによる定式化

ここでは力学的にさらに簡単な準地衡流2層モデルを用いた定式化を行う。またこれに対応した観測方程式を導く。

4.1 2層モデル

下の図のような系を考える。

このとき, 各層における渦位保存より

$$\frac{d_1}{dt} \left(\frac{f + \xi_1}{H_1 + \eta - h} \right) = 0$$

$$\frac{d_2}{dt} \left(\frac{f + \xi_2}{H_2 + h} \right) = 0$$

ここで, $\xi_{1,2}$ は1層, 2層目の相対渦度

$$\xi_{1,2} = \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial u_{1,2}}{\partial y}$$

であり, また

$$\frac{d_{1,2}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{1,2} \frac{\partial}{\partial x} + v_{1,2} \frac{\partial}{\partial y}$$

である。

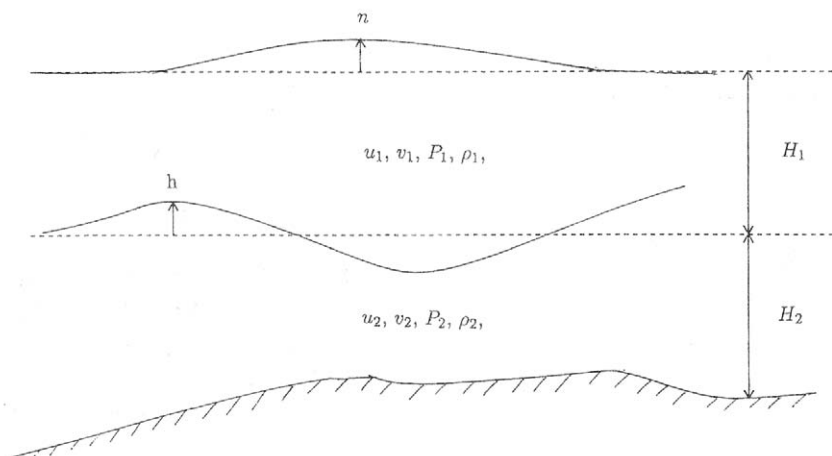


図1 2層モデルの説明図

準地衡流近似では,

$$u_1 \sim -\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial y}$$

$$v_1 \sim \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \delta \rho_2}{\partial x}$$

となる。また, 静圧水近似から

$$\begin{aligned} p_1 &= -\rho_1 g(z - H_1 + h) & z > -H_1 + h \\ p_2 &= -\rho_2 g(z - H_2 + h) & -H_2 < z < -H_1 + h \end{aligned}$$

であるため,

$$-fv_1 \sim -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \rho_1 g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$-fv_2 \sim -\frac{1}{\rho_0 f_0} \left(\left(\rho_1 g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho_0 (\rho_2 - \rho_1) \right) g \frac{\partial h}{\partial x} \right)$$

したがって

$$\boxed{(\delta p_1 - \delta p_2) = -\rho_0 g' h} \quad (18)$$

となる。ここで g' は

$$g' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0} g$$

で定義され, *reduced gravity* と呼ばれるパラメータである。ここで,

$$\left| \frac{\eta}{H} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{h}{H} \right| \ll 1, \quad f = f_0 + \beta y$$

を仮定して上層の渦位方程式を書くと,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial \delta \rho_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \left[D^2 \delta p_2 + \frac{f_0^2}{g'H} (\delta p_1 - \delta p_2) + \beta f_0 \rho_0 y \right] = 0$$

となる。下層でも同様の方程式が得られる。

ここで, 流線関数 ψ を

$$\psi = H_1 p_1 + H_2 p_2$$

と導入し,

$$h = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_0 g'$$

を用いると, p_1, p_2 はそれぞれ

$$\boxed{\delta p_1 = \frac{\psi}{H_1 + H_2} - \frac{H_2}{H_1 + H_2} \rho_0 g' h} \quad (19)$$

$$\boxed{\delta p_2 = \frac{\psi}{H_1 + H_2} - \frac{H_1}{H_1 + H_2} \rho_0 g' h} \quad (20)$$

と書き換えることができ, 最終的に準地衡流方程式を

$$p_1, p_2, h$$

と2つのモードに分解して書くことができる。

また, 後のセクションにおける簡便さのために

$$\phi = \begin{pmatrix} \psi \\ h \end{pmatrix} \quad (21)$$

と書き, 離散化して行列形式にすると, 準地衡流方程式は形式的に

$$(t + \Delta t) = L(t) + N(t)$$

と書くことができる。 L は線形項, N は非線形項を表す。

4.2 観測方程式

密度境界面が h だけ変化した時,

$$\rho \sim \rho_0 - \frac{\partial \rho}{\partial z} h$$

$$\sim \rho_0 - \frac{\Delta \rho}{D} h$$

ここで

$$D = \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{-1}$$

で *Scale height* と呼ばれるパラメータである。海洋においては

$$D = (1000m)$$

である。一方, 水温と密度の関係は

$$\rho = \rho_0 + \alpha \delta T, \quad \alpha = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

より, 水温と境界面の変化 h との関係は

$$\delta T = \frac{\Delta \rho}{\alpha D} h = \frac{\Delta \rho}{\alpha D \rho_0 g'} (\delta p_2 - \delta p_1) \quad (22)$$

となる。ところで, 水温の変化による音速の変化は

$$c = c_0 + \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right) \delta T \quad (23)$$

であるため, (22) と (23) より最終的に

$$\delta c \sim \frac{\Delta \rho}{\alpha D} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right) h = \frac{\Delta \rho}{\alpha D \rho g'} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right) (\delta \rho_2 - \delta \rho_1) \quad (24)$$

となる。

今, *reciprocal* なトモグラフィーを行った場合を考える。
音源1から音源2への伝播時間は

$$T^{1 \rightarrow 2} = \int_i \frac{ds}{c_0 + \delta c + U \cdot i}$$

ここで U は順圧流速である。
また, その逆は

$$T^{2 \rightarrow 1} = \int_i \frac{ds}{c_0 + \delta c - U \cdot i}$$

となる。したがって,

$$T^+ = \frac{1}{2}(T^{1 \rightarrow 2} + T^{2 \rightarrow 1}) \sim T_0 - \int_i \frac{\partial c}{c_0^2} ds \quad (25a)$$

$$T^- = \frac{1}{2}(T^{1 \rightarrow 2} - T^{2 \rightarrow 1}) \sim \int_i \frac{U \cdot ds}{c_0^2} (ds = ds \cdot i) \quad (25b)$$

ここで T^+, T^- を h , を用いて記述すれば,

$$\begin{aligned} T^+ &= T_0 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\Delta \rho}{\alpha D} \left(\frac{\partial c}{\partial T} \right) \int_{Soj} h ds + \varepsilon_h^{obs} \\ T^- &= \frac{1}{c_0^2} \int_{Soj} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \varepsilon_\psi^{obs} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで $\varepsilon_h^{obs}, \varepsilon_\psi^{obs}$ は2層に近似したことによる誤差, 線形化による誤差, グリッド化した(する)ことによる誤差を含む。

$$\phi = \begin{pmatrix} \psi \\ h \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{obs} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\psi^{obs} \\ \varepsilon_h^{obs} \end{pmatrix}$$

を用いて, シンボリカルには

$$T = \begin{pmatrix} T^+ \\ T^- \end{pmatrix} = L\phi + \varepsilon^{obs}$$

と書くことができる。

さて, ここで観測値を $\tilde{\phi} = (\tilde{\psi}, \tilde{h})$ によって表そうとすると, いかなる誤差が生ずるか, その評価をすることが重要である。これは, *Part 2* (新家他, 1999) で考察する。

5 逆問題に関するノート

5.1 Gauss-Markov smoothing

この手法は現在の海洋音響トモグラフィシステムに適用されているものである。観測をもとにモデルを線形補間すると,

$$\phi^+ = \phi + w^T (T - L\phi)$$

ここで, ϕ^+ は観測値を用いて線形補間後の流線関数, 境界面の変動を表す。また, *super scrip* の T は, 転置を表す。真の値を $\tilde{\phi}$ として補正後の誤差を考えると

$$e^2 = \overline{(\tilde{\phi} - \phi^+)^2} = \overline{(\tilde{\phi} - \phi)^2} + (w - c^{-1}n)^T (w - c^{-1}n) - n^T c^{-1}n$$

ここで

$$\begin{aligned} n &= \overline{(\tilde{\phi} - \phi)(T - L\phi)} \\ c &= \overline{(T - L\phi)(T - L\phi)^T} \end{aligned}$$

と変形することができる。ここで e^2 を最小にするのは

$$w = c^{-1}n$$

したがって

$$\phi^+ = \phi + n^T c^{-1} (T - L\phi)$$

となる。また,

$$e^2 = \overline{(\tilde{\phi} - \phi)^2} - n^T c^{-1}n$$

ところで, 計測した到達時間は, 温度場, 速度場の変動に線形に関係しているものとして考え,

$$T = L\tilde{\phi} + \varepsilon^{obs}$$

と書くことができる。したがって,

$$\begin{aligned} c &= \overline{(T - L\phi)(T - L\phi)^T} \\ &= L(x_1) C(x_1, x_2) L^T(x_2) + \overline{\varepsilon^{obs} \varepsilon^{obsT}} \end{aligned}$$

ここで, C は共分散行列

$$C(x_1, x_2) = \overline{(\tilde{\phi}(x_1) - \phi(x_1))(\tilde{\phi}(x_2) - \phi(x_2))}$$

同様に

$$\begin{aligned} n(x_1) &= \overline{(\tilde{\phi}(x_1) - \phi(x_1))(T - L(x_2)\phi(x_2))^T} \\ &= L(x_2) C(x_1, x_2) \end{aligned}$$

となる。

したがって, 補正值 ϕ^+ は

$$\phi^+(x_1) = \phi(x_1) + K_M(x_1) (T - L\phi(x_1)) \quad (27a)$$

$$K_M(x_1) = \frac{L(x_2) C(x_1, x_2)}{L(x_3) C(x_3, x_4) L^T(x_4) + \overline{\varepsilon^{obs} \varepsilon^{obsT}}} \quad (27b)$$

となる。

また, エラーの共分散は

$$\begin{aligned} \overline{(\tilde{\phi} - \phi^+)(\tilde{\phi} - \phi^+)^T} &= C(x_1, x_2) \\ &- \left(\frac{L^T(x_3)C(x_1, x_3)}{L(x_4)C(x_4, x_5)L^T(x_5) + \varepsilon^{obs} \varepsilon^{obsT}} \right) L^T(x_6)C(x_6, x_2) \end{aligned} \quad (28)$$

となり、 $C(x_1, x_2)$ に比べ補正後のエラーは一般的に小さくなる。

5.2 カルマンフィルター

真の値 $\tilde{\phi}$ は準地衡流方程式に近似的に従うと考え、その発展方程式をシンボリックに次のように書く。

$$\tilde{\phi}_t = L \tilde{\phi} + F + \omega$$

ここで、 F は非線形項や強制項を表す。 ω はバイアスのないエラーである。ここで、

$$\tilde{\phi} = \phi + \phi'$$

とする。ここで、 ψ は準地衡流方程式に従う変数 (ψ, h)^T であり、 ϕ' はそこからのエラーである。線形であることを仮定すると (すなわち F は小さい)、

$$\phi_t = L \phi + F \quad \text{準地衡流}$$

$$\phi'_t = L \phi' + \omega \quad \text{ノイズ}$$

とシグナルとノイズを分離することができる。エラー共分散を

$$C(x_1, x_2, t) = \overline{\phi'(x_1, t)\phi'(x_2, t)}$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} C_t(x_1, x_2, t) &= \overline{\phi'_1 \phi'_2} + \overline{\phi'_2 \phi'_1} \\ &= \left(L(x_1) + L(x_2) \right) C(x_1, x_2, t) + \overline{\phi'_2 q_1} + \overline{\phi'_1 q_2} \\ &= \left(L(x_1) + L(x_2) \right) C(x_1, x_2, t) + W(x_1, x_2) \end{aligned}$$

ここで

$$W(x_1, x_2) \delta(t_1 - t_2) = \overline{w(x_1, t)w(x_2, t)}$$

となる。

したがって、カルマンフィルターは次のようになる。

(発展方程式)

$$\phi_t(x) = L \phi(x) + F(x) \quad (29)$$

$$C_t(x_1, x_2) = \left(L(x_1) + L(x_2) \right) C(x_1, x_2) + W(x_1, x_2) \quad (30)$$

(初期化)

$$\phi^-(x_1) = \phi(x_1) + K(x_1) \left(T - L(x_1)\phi(x_1) \right) \quad (31)$$

$$K(x_1) = \frac{L(x_2)C(x_1, x_2)}{[L(x_3)C(x_3, x_4)L^T(x_4) + \varepsilon^{obs} \varepsilon^{obsT}]} \quad (32)$$

$$C^+(x_1, x_2) = C(x_1, x_2) - K(x_1)L(x_3)C(x_3, x_4) \quad (33)$$

ここで $K(x_1)$ はカルマンゲインと呼ばれるものである。これは、*Gauss-Markov* で導出した $K_M(x_1)$ (式(27b)参照) と形式的に同じ形をしていることがわかる。

ここでは、双方向の音波伝播によって得られる物理量、すなわち音波の到達時間の平均 T^+ および差 T^- と、準地衡流方程式で表現できる流線関数 ψ と境界面の変位 h を、カルマンフィルターを用いることによって形式的に結びつけることが出来ることを示した (式(29) - (33)参照)。この手法を具体化するためには、誤差をいかに評価するかが今後の課題となる。

6 おわりに

本稿により、海洋音響トモグラフィデータを海洋物理学で一般的な準地衡流の枠組みで解釈することが可能になった。今後、観測データ (トモグラフィ実験、歴史的海洋観測データ、観測断面データ) や海洋大循環モデルによる整合性のある疑似観測データを用いた各種誤差の評価、また、実際のデータを用いた、より実際のな対応付け、を行うことが重要である。そうすれば、本稿で示したカルマンフィルターを用いて、データ同化実験を行うことが可能となる。

なお、本研究は海洋科学技術センターと沖電気工業株式会社との共同研究の一環として行われたものである。

参考文献

- 1) Pedlosky, J.: *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag (1986)
- 2) Munk W., and C. Wunsch : *Ocean acoustic tomography : a scheme for largescale monitoring*, *Deep-Sea Research*, **26**, 123-161. (1979)
- 3) Munk W., P. Worcester and C. Wunsch : *Ocean Acoustic Tomography*, Cambridge univ. press(1995)

(原稿受理: 1999年8月10日)

