北極海氷野の拡散係数の見積もり

角田　晋也[*1]

北極海氷野は氷の割れ目リード(lead)に沿って横ズレすることが知られている。リードは常に同じ場所にあるのではなく，ある頻度で発生し，横ズレの後消滅する。この繰返しはshuffleと呼ばれる。本稿では，横ズレの距離と頻度から海氷野の拡散係数を見積もったところ，海盆スケールの海氷モデルで計算の安定のために使用される海氷野の拡散係数よりも2桁小さかった。

キーワード：海氷野，拡散，係数，リード，シャッフル

Estimation of a diffusive coefficient in the Arctic sea-ice field

Shinya KAKUTA[*2]

The Arctic sea-ice field is known to slip at ice cracks (leads). Leads are not located on certain steady lines, but generated on a certain frequency to disappear after slips. This iteration is called 'shuffle.' In this paper, I estimated a diffusive coefficient from slip displacement and frequency. The coefficient is 100 times smaller than that used for stabilizing numerical calculation in basin-scale sea-ice models.

Keywords : Sea-Ice field, diffusion, Coefficient, lead, shuffle

＊1　海洋科学技術センター海洋観測研究部
＊2　Ocean Observation and Research Department Japan Marine Science and Technology Center

導入

Hiber(1979)等により，開発された海盆スケールの海氷野のモデルは広く使われているが，未だに海氷野の変型の力学過程は研究が進められている最中である。このモデルでは数値計算の安定のため海氷(野)の体積保存則

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \left(h\vec{u}\right) = \nabla \cdot D\nabla h + Source \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

及び密接度保存則

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \left(A\vec{u}\right) = \nabla \cdot D\nabla A + Source \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

の式にラプラシアン型の拡散項(右辺第1項)を導入している。ここで，hは単位面積当たりの海氷の体積，すなわち氷厚，Aは密接度，すなわち単位面積の海面のうち海氷で覆われた割合，uは速度の水平成分，Dは拡散係数である。右辺第2項は凍結・融解による海氷の生成・消滅を表している。Dは実測に基づいて決定されたものではなく，あくまで数値計算を安定させるために導入されたもので，非常に大きな値が使用されている(Holland, 1993)。慣例では，式(1)および(2)を数値計算する際に，x，yの境界条件として，あらかじめ氷縁でhやAを0として解く都合上，2階の偏微分方程式にするため，拡散項を導入する必要がある。ここでx，yは直交座標系とする。もちろん，hやAが0となる氷縁の位置は，現実には予め与えられるものではなく，移流や融解・凍結によって定まるのであるが，これは本稿の議論の対象外とする。

地球フロンティア研究システムで目指している分解能は10km程度なので，このスケール以下の現象は拡散等でパラメーター化する必要がある。

海氷の平均寿命は5～6年であることが知られ，leadは100km*100km四方で年間に524の頻度で発生し，2km/dayで5日ぐらいかけて横ズレすると記されている(Thorndike，1986)。そこで，1格子四方{約10km*10km}で，毎回リードに沿って海氷がランダムにaだけずれるとすると拡散係数はどうなるか議論する。

思考実験方法

簡単のためリードはx方向とy方向にのみ同じ頻度で走るとする。100km*100km四方で1年間にざっと500回の半分で250回ぐらいx方向にリードが走る。すると，10km*10km四方で25回 x方向にリードが走る。海氷の平均寿命は5～6年なので，海氷が生きている間に10km*10km四方で約150回リードが走る。簡単のためy方向を無視してx方向だけ考える。簡単のため氷野が毎回距離aだけ横ズレすると考える。ずれ a = 2 km/day*5 day = 10 kmとする。左右どちらにずれるかは2分の1の確率でランダムであるとする。簡単のため毎回新しいリードが走り，同じところには走らないとする。つまり10km*10km四方の氷野を簡単のため約67mの等間隔で細長く千切りすると考える。

ここで，表記を一般化して，一辺が Δy の正方形の氷野に Δt の等時間間隔でN回leadが等空間間隔 Δy /(N+1)で走るとする。リードが走る順番は以下の議論に影響しない。なぜなら，N回リードが走った後は，隣り合う氷野の切端同士はaしか横ズレしていないが，左右どちらにずれるかはランダムである。ということは，酔歩のMarkov過程と同じである。Δy /(N+1)の幅で千切りされた氷野の切端のy方向の順番がMarkov過程の時刻に相当する。

今，興味があるのは，N回リードが走った後，どの程度，氷野がグチャグチャになったかである。このグチャグチャの具合から氷野の拡散係数を評価したい。グチャグチャ具合を議論するには，通常，分散を計算する。ここで注意を要するのは，N回リードが走るということは，2のN乗のケースがあり，つまり，それぞれのケースに対応して「グチャグチャの平均」と「グチャグチャの分散」があるということである。酔歩が左右に等確率で対称なので，「グチャグチャの平均」の期待値，すなわち酔歩の径路全てについてのアンサンブル平均は0である。以下，「グチャグチャの分散」の期待値がどの程度になるのか検討する。

分散の評価

始点の x 座標を0として，一歩の距離が a で n歩酔歩したうち，k歩が右だとすると，n歩酔歩した時点での x 座標は，

$$x_n = a\left(2k_n - n\right) \qquad \cdots\cdots\cdots (3)$$

「グチャグチャの平均」は以下のように記せる。

$$\bar{x} \equiv \frac{\sum_{n=0}^{N} x_n}{N+1} \qquad \cdots\cdots\cdots (4)$$

すると，「グチャグチャの平均」の期待値，すなわち酔歩の全ての径路についてのアンサンブル平均Eは以下のとおりになる。

$$E(\bar{x}) = \frac{\sum_{n=0}^{N} E(x_n)}{N+1} \qquad \cdots\cdots\cdots (5)$$

ここで式(5)の右辺第1項のΣの中身は n回試行した場合の二項分布の平均に相当するので0である。従って，

$$E(\bar{x}) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (6)$$

となる。

「グチャグチャの分散」は以下のように記せる。

$$\sigma^2 \equiv \frac{\sum_{n=0}^{N}\left(x_n - \bar{x}\right)^2}{N+1} = \left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} x_n^2\right) - \bar{x}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots (7)$$

ここで「グチャグチャの分散」の期待値，つまり酔歩の全ての経路についてアンサンブル平均を考えると，

$$E(\sigma^2)=\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}E(x_n^2)\right)-E(\bar{x}^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

式(8)の右辺第1項のΣの中身は n回試行した場合の2項分布の分散に相当するので,

$$E(x_n^2)=na^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

一方, 式(8)の第2項は式(4)を代入して次のように変型できる。

$$\begin{aligned}E(\bar{x}^2)&=\frac{1}{(N+1)^2}E\left(\left(\sum_{n=0}^{N}x_n\right)^2\right)\\&=\frac{1}{(N+1)^2}E\left(\sum_{n=0}^{N}x_n^2+2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n-1}x_m x_n\right)\\&=\frac{1}{(N+1)^2}\sum_{n=0}^{N}E(x_n^2)+\frac{2}{(N+1)^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n-1}E(x_m x_n)\end{aligned} \quad \cdots (10)$$

式(10)を式(8)に代入すると次が得られる。

$$E(\sigma^2)=\frac{N}{(N+1)^2}\sum_{n=0}^{N}E(x_n^2)-\frac{2}{(N+1)^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n-1}E(x_m x_n) \quad \cdots\cdots\cdots (11)$$

式(11)の右辺第1項のΣの中身は式(9)で与えられるが, 右辺第2項のΣの中身は酔歩のMarkov過程ないしは条件付き確率を考慮しなければ評価できない。m歩酔歩した時に位置xmにいる確率を

$$\begin{aligned}p_m(x_m)&=\frac{{}_mC_{k_m}}{2^m}\\&=\frac{{}_mC_{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+m\right)}}{2^m}\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

と表記すると, m歩酔歩した時に位置xmにいる条件下で, さらに(n-m)歩酔歩したときに位置xnにいる条件付き確率は

$$p_{n-m}(x_n-x_m)$$

と表せる。従って,

$$E(x_m x_n)=\sum_{x_n}\sum_{x_m}x_m x_n\, p_{n-m}(x_n-x_m)p_m(x_m) \quad \cdots\cdots (13)$$

ここで, Σは, xmや xnがある値を取るような酔歩の径路を考えた場合, あらゆるxmや xnの場合のΣの中身の総和を意味する。さらに見易くするため

$$\gamma\equiv x_n-x_m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

という表記を導入すると, γとxmは独立なので, 式(13)は以下のように変型できる。

$$\begin{aligned}E(x_m x_n)&=\sum_{\gamma}\sum_{x_m}x_m(\gamma+x_m)p_{n-m}(\gamma)p_m(x_m)\\&=\sum_{\gamma}\sum_{x_m}x_m\gamma p_{n-m}(\gamma)p_m(x_m)+\sum_{a}\sum_{x_m}x_m^2 p_{n-m}(\gamma)p_m(x_m)\\&=\sum_{\gamma}\gamma p_{n-m}(\gamma)\sum_{x_m}x_m p_m(x_m)+\sum_{a}p_{n-m}(\gamma)\sum_{x_m}x_m^2 p_m(x_m)\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

ここで, m歩酔歩した場合の二項分布の平均

$$\sum_{x_m}x_m p_m(x_m)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

と

$$\sum_{\gamma}p_{n-m}(\gamma)=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

を式(15)に代入すると

$$\begin{aligned}E(x_m x_n)&=\sum_{x_m}x_m^2 p_m(x_m)\\&=ma^2\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

つまり, m歩酔歩した場合の二項分布の分散が得られる。ここで, 式(11)に式(9)及び(18)を代入すると

$$\begin{aligned}E(\sigma^2)&=\frac{N}{(N+1)^2}\sum_{n=0}^{N}na^2-\frac{N}{(N+1)^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n-1}ma^2\\&=\frac{N^2a^2}{2(N+1)}-\frac{2a^2}{(N+1)^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{m(m-1)}{2}\\&=\frac{N^2a^2}{2(N+1)}-\frac{2a^2}{(N+1)^2}\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{m(m+1)}{2}-m\right\}\\&=\frac{N^2a^2}{2(N+1)}-\frac{a^2N(N+2)}{3(N+1)}+\frac{Na^2}{N+1}\\&=\frac{a^2(N^2+2N)}{6(N+1)}\\&=\frac{a^2}{6}\left(N+1-\frac{1}{N+1}\right)\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

Nが充分に大きい時, 式(19)は

$$E(\sigma^2)\rightarrow\frac{Na^2}{6} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

で近似できる。

拡散係数の評価

一歩 a にかかる時間Δtで左右等確率の酔歩の二項分布でn歩酔歩いた場合, 分散は式(9)で与えられる。さらに, Δtとａの間に

$$D=\frac{a^2}{\Delta t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

が成立つようにしたまま, かつ, 時刻 nΔt が有限の値のまま, Δtとa を0に近付けた場合の極限は正規分布となり, 拡散係数をDとするラプラシアン形の拡散方程式が成立つこと

が知られている。時刻 nΔt の分散Vは式(9)で与えられ，これに式(21)を用いて a を消去すると，

$$V = na^2 = Dn\Delta t \qquad \cdots\cdots (22)$$

となる。ところで「グチャグチャの分散」の期待値は式(20)で与えられるから，「グチャグチャ」が正規分布に従うと近似して式(22)に代入すると

$$\frac{Na^2}{6} = DN\Delta t$$

$$\therefore D = \frac{a^2}{6\Delta t} \qquad \cdots\cdots (23)$$

つまり，この関係式を近似的に使うと，shufflingによる拡散係数が見積もれる。幸いにして，式(23)より，拡散係数はリードの発生回数N，あるいは時刻 NΔt には依存しないことが判る。10km*10kmの氷野に1年間で25回leadが走る，つまりΔt =1 year/25=0.04 year，さらに，横ズレa=10kmとすると，式(23)より

D=(10 km**2)/6/0.04 year=約13 m**2/s

一方，Holland(1993)の海氷(Hibler海氷モデル)の拡散係数は 2000 m**2/sなので，shufflingによる実際の拡散係数よりもモデルの方が2桁大きい。

海氷の平均寿命が5〜6年なのでN=約150というのはあまり大きくないが，式(20)の近似をするには充分である。

結論

簡単のためリードはx方向とy方向にのみ同じ頻度で走るとする。簡単のためy方向を無視してx方向だけ考える。簡単のため毎年新しいリードが25回発生して，その度に氷野が毎回距離10kmだけ横ズレすると考える。左右どちらにずれるかは2分の1の確率でランダムであるとする。簡単のため毎回新しいリードが走り，同じところには走らないとする。以上の簡略化の下で，氷野の「グチャグチャ具合」である分散を評価することができた。この分散から，拡散係数を評価したところ通常モデル計算で拡散項に使用されているものよりも2桁小さかった。

参照文献

Hibler, W. D., III, 1979, J. Phys. Oceanogr., 9, pp. 815-846, A dynamic thermodynamic sea ice model.

Holland D. M., Mysak L. A., Manak D. K., and Oberhuber J. M., 1993, JGR, Vol. 98, No. C2, pp. 2561-2586, Sensitivity Study of a Dynamic Thermodynamic Sea Ice Model.

Thorndike, A. S., 1986, JGR, Vol. 91, No. C6, pp. 7691-7696, Diffusion of Sea Ice

(原稿受理：2002年11月14日)